BULLETIN N° 143
ACADÉMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES

<u>Séance du mardi 9 mars 2010 :</u>
Axes de recherche de la modélisation et de l'axiomatisation des sciences sociales
avec Marc BARBUT Directeur d'Etudes à l'EHESS
UMR 8557 Centre d'analyse et de mathématique sociales

<u>Prochaine séance : mardi 13 avril 2010</u>:
MSH, salle 215-18heures
Axes de recherche de la modélisation et de l'axiomatisation des sciences sociales
Avec Jean Pierre DOZON Directeur Scientifique à la Fondation de la MSH

Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences
Siège Social : Fondation de la Maison des Sciences de l'Homme 54, bd Raspail 75006 Paris
Nouveau Site Web : http://www.science-inter.com

ACADEMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES
FONDATION DE LA MAISON DES SCIENCES DE L'HOMME

mars 2010

N°143

TABLE DES MATIERES

Prochaine séance: mardi 13 avril 2010 18h
MSH, salle 215-18heures :
Axes de recherche de la modélisation et de l'axiomatisation des sciences sociales
Avec Jean Pierre DOZON, Directeur Scientifique à la Fondation de la MSH

ACADEMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES
Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

Séance du
Mardi 9 mars 2010

Maison des Sciences de l'Homme, salle 215, à 18 h.

La séance est ouverte à 18 h. 00 sous la Présidence de Michel GONDRAN et en la présence de nos collègues Gilbert BELAUBRE, Françoise DUTHEIL, Claude ELBAZ , Walter GONZALEZ, Irène HERPE-LITWIN, Jacques LEVY, Pierre MARCHAIS, Pierre PESQUIES.

Etaient excusés : François BEGON , , Bruno BLONDEL, , Alain CARDON, , Gilles COHEN-TANNOUDJI , Brigitte DEBUIRE, Jean -Pierre FRANCOISE , Marie-Louise LABAT, Saadi LAHLOU, Gérard LEVY, Alain STAHL.

.

L'Ordre du jour appelle :

I) L'accueil deux nouveaux membres de l'Académie, Pierre PESQUIES et Walter GONZALEZ qui reçoivent leurs documents d'admission à l'AEIS.

II) une étude des *axes de recherche de la modélisation et de l'axiomatisation des sciences sociales avec Marc BARBUT Directeur d'Etudes à l'EHESS* .

Marc BARBUT est Directeur d'Etudes à l'EHESS au Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales (CAMS) , UMR 8557. Agrégé de Mathématiques et titulaire d'un doctorat d'état es lettres et sciences humaines, il a été de 1966 à 1970 professeur associé à la faculté des lettres et sciences humaines de Paris (Sorbonne) et de 1970 à 1982 professeur associé à l'université René Descartes (Paris 5).

Depuis 1962, il exerce des fonctions à l'Ecole Pratique des Hautes Etudes (EPHE) et à l'EHESS :

- 1962-1981: co-directeur du centre de mathématique sociale (CMS)
- 1981-1994: directeur du CMS (devenu CAMS)
- depuis sa création en 1962: directeur de la revue *Mathématiques et Sciences humaines-Mathematics and Social Sciences :* http://www.ehess.fr/revue-msh/index.php
- 1972-1979: membre du bureau de l'Ecole (EPHE – 6, puis EHESS), chargé de la scolarité et de la création des centres régionaux (Marseille, Toulouse, Lyon)
- depuis 1982: co-responsable du séminaire d'Histoire du calcul des probabilités et de la statistique
- depuis sa création en 2004, co-directeur du Journal ***électronique d'histoire de la probabilité et***

- ***de la statistique*** – Electronic Journal for the history of Probability and statistics: http://www.jehps.net

Marc BARBUT est donc un spécialiste éminent du domaine que nous souhaitons aborder dans notre prochain congrès dédié à la modélisation et l'axiomatisation des sciences sociales. Interrogé sur les spécialistes à contacter dans les divers domaines à explorer il nous suggère :

1) dans le domaine de la DEMOGRAPHIE :
- Daniel COURGEAU spécialisé dans l'étude des migrations , des trajectoires de vie sur lesquelles il utilise une modélisation multi-niveau
- Hervé LE BRAS spécialisés dans les mathématiques de la démographie, et plus particulièrement dans la géographie électorale

2) dans le domaine de la GEOGRAPHIE :
- Denise PUMAIN et Arnaud BANOS spécialisés dans la simulation informatique qui s'éloigne toutefois un peu de la modélisation mathématique-il reproche toutefois à cette démarche un certain défaut d'axiomatisation préalable à toute mathématisation

3) Dans le domaine de la SOCIOLOGIE :
- Eric BRIAN, qui se situe dans la mouvance de Bourdieu et qui s'est intéressé à la démographie historique, au taux de masculinité à la naissance et aux conséquences en termes de problèmes sociaux.
- Raymond BOUDON qui a formulé des théories
- Jean Pierre NADAC un ancien spécialiste de physique statistique qui s'est ensuite dirigé vers la mathématisation de la sociologie en développant des systèmes dynamiques complexes notamment dans l'étude de la propagation de rumeurs , de contagions…avec des implications en criminologie.
- Michel ARMATTE du Centre Koyré spécialisé dans la modélisation des systèmes complexes

4) Dans le domaine de l'ARCHEOLOGIE :
- Jean Claude GARDIN qui cherche à formaliser ce domaine.

5) Dans le domaine de la THEORIE DE LA DECISION :
- Bernard MONTJARDET, un mathématicien qui appartient au CAMS, spécialiste de la théorie des jeux sans être spécialisé en Sciences Sociales
- Bertrand ST SERNIN, un philosophe, Recteur de l'Université Paris IV qui a fait une thèse sur la théorie des jeux.

6) Dans le domaine de l'HISTOIRE qu'il exclut quelque peu des sciences sociales, car elle est purement anthropologique et non quantifiable selon lui

7) Dans le domaine de la LINGUISTIQUE :
- Deirdre PRATT de la Durban University of Technology

8) Concernant les problèmes d'EPISTEMOLOGIE :
- Georges ISRAEL Professeur de Mathématiques à la Sapienza de Rome
- José ARRIBAS, Professeur de Sociologie à l'Université de Madrid.
- Jean PETITOT , mathématicien spécialisé dans les modèles dynamiques avec utilisation de fractales

9) Dans le domaine de la PSYCHOLOGIE :
- Il cite Henry ROUANET , malheureusement décédé en 2008, qui avait cherché à modéliser cette discipline qui avait contribué au Bulletin de méthodologie en Sciences sociales (BMS) http://bms.revues.org/

Après cet ensemble de suggestions un certain nombre de questions sont soulevées :

- N’existe-t-il pas des domaines avec des avancées théoriques qui permettraient une modélisation future (allusion à l’anthropologie…) ?

- Selon Marc BARBUT il n’existerait pas encore de modélisation fiable en anthropologie notamment. Dans de nombreux domaines on utilise des techniques informatiques sans poser les axiomes préalables ce qui est un manque de créativité. Une bonne modélisation doit comporter une observation couplée à une théorisation.

- Le but de la mathématisation n’est-il pas la modélisation ?

- Selon Marc BARBUT, il ya même une inversion des finalités, car les problèmes de modélisation en Sciences humaines provoquent elles-mêmes la création de nouveaux outils logiques et mathématiques comme l’ont montré les travaux de Jean-Paul BENZECRI , Vilfredo PARETO etc…

Après cette riche discussion , la séance prend fin.

Bien amicalement à vous,

Irène HERPE-LITWIN

Comptes-rendus de la section Nice-Côte d'Azur

« Et pour qui donc ai-je tant appris ? »
- N'aie point peur que ta peine ne soit perdue : tu as appris pour toi.
Sénèque.

.

Compte-rendu de la séance du 18 février 2010

(134ème séance)

Présents :

Jean Aubouin, Richard Beaud, Patrice Crossa-Raynaud, Guy Darcourt, René Dars, Jean-Pierre Delmont, Jean-Paul Goux, Jacques Lebraty, Maurice Papo.

Excusés :

Alain Bernard, René Blanchet, Sonia Chakhoff, François Cuzin, Yves Ignazi, Gérard Iooss.

1- Approbation du compte-rendu de la 133ème séance.

Le compte-rendu est approuvé à l'unanimité des présents.

2- Le mois écoulé.

René Dars : des fossiles de gastéropodes géants ont été découverts aux Etats-Unis datant d'après la grande extinction du Permien qui avait vu disparaître 9/10 des espèces vivantes

Patrice Crossa-Raynaud : c'est l'illustration de ce que j'ai dit le mois dernier : la survie dans des zones pouvant être très réduites de nombreuses espèces qui sont capables ensuite de recoloniser très rapidement les zones laissées vierges après une extinction..

3- Débat : « La diversité psychique chez l'Homme » (Guy Darcourt).

L'homme rencontre la diversité dans le monde qui l'entoure : diversité des espèces, des climats, des cultures, des êtres humains etc. Il la rencontre aussi en lui-même. Il n'est pas un être simple, il a des désirs multiples et contradictoires, des réactions habituelles et d'autres qui le surprennent, il est capable de comportements variables.

Quelle est la place de cette diversité dans sa vie psychique ?

Elle apparaît dans les émotions et les sentiments qu'il éprouve, dans sa vie imaginaire, dans sa perception du monde et dans ses comportements. L'éprouvé affectif est fait de toute une gamme d'émotions : gaîté, affliction, tendresse, angoisse, colère … Avec de multiples nuances et de multiples degrés : de la tristesse à la morosité, de la contrariété à la révolte…

Elle apparaît dans les idées et les représentations qui meublent sa vie imaginaire.

Elle réside aussi dans sa perception du monde ; il est sensible à des situations diverses qui déclenchent chez lui des sensations agréables ou désagréables, selon ses goûts et selon les circonstances ; il est capable d'éprouver du plaisir pour une stimulation délicate, comme une musique harmonieuse, ou pour des stimulations fortes, comme dans un sport violent.

Elle est aussi présente dans ses réactions et ses comportements. Il est capable d'être attentif et méticuleux pour une tâche délicate et à l'opposé insouciant et désinvolte en périodes de détente.

La diversité des composantes de la vie affective est donc évidente. Mais ce constat ne suffit pas pour comprendre sa place dans la vie psychique, il convient de préciser sa valeur. A notre époque où diversité est devenu une sorte de symbole de ce qui est favorable, peut-on affirmer que, dans la vie psychique, elle résume à elle seule le meilleur fonctionnement ?

Elle apparaît certes comme une caractéristique de la santé mentale dans une opposition à la maladie psychique. Celle-ci en effet, quelle qu'elle soit, névrose ou psychose, est toujours caractérisée par une diminution de diversité. Elle réduit l'éventail des possibilités de fonctionnement affectif. Le délirant ne perçoit le monde que selon le sens de son délire. Le persécuté ressent comme agressif tout ce qui l'entoure. L'halluciné interprète le monde uniquement à travers son délire. L'obsessionnel vérificateur n'a qu'une préoccupation : contrôler à l'infini. L'obsessionnel de la saleté est absorbé par ses lavages dans une démarche jamais achevée car il la trouve toujours insuffisante et il est contraint de répéter ses compulsions. L'hystérique ne peut avoir avec les autres qu'une seule attitude : la tentative de séduction suivie de la fuite. Le pervers exhibitionniste n'a que cette possibilité d'atteindre la jouissance. Le sujet normal a, lui, la capacité de percevoir et de réagir de façons diverses. S'il a un travail de vérification à faire il peut devenir aussi méticuleux que l'obsessionnel. S'il est face à des adversaires, il peut mobiliser ses capacités de suspicion tout comme le persécuté. S'il souhaite séduire, il peut utiliser une stratégie comparable à celle de l'hystérique. Il est apte à changer d'attitudes et à choisir celle qui lui convient le mieux. Il peut parfois être voyeur ou exhibitionniste, à l'image du pervers, mais ce n'est pas à cela que se limite sa vie sexuelle. Il apparaît ainsi qu'une des caractéristiques de la santé psychique est la richesse des capacités de fonctionnement affectif, à l'inverse de la pathologie mentale dans laquelle le champ des fonctionnements est restreint. Ce qui caractérise un sujet malade ce n'est pas seulement ce qu'il dit ou fait mais c'est qu'il ne peut dire ou faire que cela. Dans la maladie mentale la vie affective est pauvre alors que dans la santé psychique elle est riche. Cette opposition entre la santé et la maladie ne fait pas reposer leur différence sur la qualité mais sur la quantité. Il y a un continuum entre la santé absolue (impossible) et la maladie. Le sujet sain est celui qui se trouve à une distance suffisante. On peut aussi résumer les choses par une boutade : le sujet sain est celui qui a toutes les maladies mais en petites quantités et peut en jouer.

Est-ce à dire que la santé est proportionnelle au degré de diversité ? Une diversité extrême le rendrait inconsistant et instable. On peut dire de la diversité ce qu'Esope disait de la langue qu'elle peut être la meilleure chose comme la pire. Insuffisante, elle est une infirmité. Débridée elle est un désordre. Elle doit être à mi-distance entre la pauvreté et l'excès. Elle doit être suffisante mais pas excessive.

C'est donc qu'elle ne suffit pas à caractériser la santé mentale et qu'une autre composante du psychisme est tout aussi essentielle. Il s'agit de la capacité de maîtrise de cette diversité. Elle se manifeste par l'adaptabilité, l'équilibre et la stabilité. L'adaptabilité est à la base d'un fonctionnement psychique sain. Car il ne suffit pas d'avoir de multiples potentialités, encore faut-il les utiliser à bon escient en fonction des contextes. Tout sujet reçoit du monde extérieur des stimulations tantôt agréables tantôt désagréables et d'intensités variables ; trouver en soi les capacités permettant de faire face aux agressions et aux malheurs ou de tirer le meilleur parti d'avantages et de bonheurs nécessite de mobiliser les potentialités les plus adaptées. Pour toute action l'homme a le choix entre des stratégies différentes et il est souhaitable qu'il soit capable de choisir la meilleure. L'équilibre est un autre aspect de cette maîtrise. Les multiples possibilités sont en partie contradictoires et il convient de les trier et de les hiérarchiser. La stabilité enfin est déterminante pour donner une cohérence et une efficacité à toute action.

Cette maîtrise donne sa qualité à la diversité et elle s'oppose aux carences de la maladie mentale. Une défaillance de l'adaptabilité entraîne une désocialisation. Un déséquilibre laissera le sujet sous la domination de telle ou telle tendance, l'agressif sera incapable d'être convivial quand ce serait justifié, le masochiste ne pourra pas éviter de se mettre en situation d'échec, l'interprétant ne parviendra jamais à une juste appréciation des autres. Le sujet fragile sera soumis aux influences externes, par exemple, dans la pathologie de l'estime de soi, le sujet oscille entre des phases de suffisance et des phases d'effondrement selon qu'il est l'objet d'un compliment ou d'une critique.

L'état affectif repose ainsi sur la conjonction de la diversité des potentialités et de la maîtrise de cette diversité. La santé psychique se caractérise par la richesse et la souplesse de cette conjonction alors que la maladie mentale se caractérise par son appauvrissement.

Ceci dit, cette diversité a ses limites. Personne ne jouit d'une richesse totale ni d'une maîtrise parfaite. Chacun a ses points faibles et ses insuffisances. Chacun privilégie un certain nombre de réactions. C'est ce qui donne son style de vie et oriente son comportement et c'est ce qu'on appelle le caractère (ou la personnalité). Identifier les traits de caractère d'une personne permet de prévoir ses réactions, puisque c'est mettre en évidence ses modes de fonctionnement privilégiés.

Cette limitation de la diversité par le caractère ouvre sur une autre diversité, celle qui existe entre les individus. Tout en restant dans le cadre de la normalité, il y a de grandes différences entre les personnalités. Tel sujet a une grande capacité imaginative, tel autre a un esprit assez vide. L'un éprouve des émotions nuancées, l'autre ne vibre qu'aux émotions fortes. L'un est méfiant et l'autre trop confiant. L'un est déterminé et l'autre craintif. L'un maîtrise ses impulsions et l'autre non. Le caractère de chacun détermine ainsi ses aptitudes et aussi ses limites.

La diversité psychique est, pour la santé mentale, une condition nécessaire mais pas suffisante. Elle doit aussi être maîtrisée. Elle n'est jamais totale car elle a des limites.

<u>Maurice Papo</u> : la diversité humaine c'est en somme ce que l'on avait l'habitude d'appeler l'esprit curieux. L'intelligence c'est la capacité de l'être humain de trouver quelque chose qui n'a aucun rapport avec des choses connues.

<u>Jacques Lebraty</u> : Guy nous a décrit la diversité de l'Homme sous l'angle du psychologue, du psychiatre. Cette vision des choses, c'est l'équilibre entre le bonheur et la santé mentale. Est-ce qu'un homme, doué d'une santé mentale parfaite, peut être malheureux ? Et s'il ne l'est pas, est-ce parce qu'il a perdu sa santé mentale, du moins provisoirement ?

On sait aujourd'hui ce que c'est que moins de diversité, mais on ne sait pas ce qu'est plus de diversité. Dans une entreprise où les ouvriers ont chacun un salaire, quel est le niveau de diversité du salaire dans cet ensemble ? Si chaque ouvrier a un salaire différent, il y a une certaine diversité. Mais si la moitié des ouvriers a un salaire très bas et l'autre un salaire élevé, quelle est celle où il y a le plus de diversité ? Il est difficile de répondre. En revanche, on sait que lorsqu'il n'y a pas de diversité du tout, on est dans un univers totalitaire.

Mais quelles sont les pathologies de trop de diversité ?

<u>Guy Darcourt</u> : pour envisager un excès de diversité qui serait défavorable, il ne faut pas se limiter à une appréciation quantitative de cette diversité, il faut aussi envisager sa maîtrise car c'est surtout le manque de

maîtrise qui peut la rendre nocive. Elle devient une diversité débridée, sans choix, avec des réactions multiples mais mal adaptées..

Maurice Papo : le problème fondamental dans les deux exemples est de savoir d'où vient la différence.

Guy Darcourt : dans le premier exemple, il s'agit de diversité et dans le second, de différence.

Richard Beaud : nous avons parlé de diversité, de normalité, de santé psychique. Seriez-vous d'accord avec cette définition, cette approche de la normalité : « Est en bonne santé psychique celui qui est capable de vivre dans une communauté en écoutant les autres, en apportant ce qu'il a aux autres et tout cela, en essayant de fédérer la société dans laquelle il vit ». Ceci implique qu'il accepte et même apprécie la diversité, alors que celui qui est en mauvaise santé psychique est mal à l'aise avec la diversité, il a besoin de se faire remarquer et il attire le groupe contre lui-même.

Guy Darcourt : effectivement, celui qui est en bonne santé mentale est suffisamment tolérant sans être laxiste. Dans ces questions il faut distinguer l'analyse psychologique et l'analyse morale. Ici les deux se rejoignent : cette mise en valeur de l'ouverture aux autres a un aspect moral mais la capacité de le faire est une qualité psychologique.

Richard Beaud : lorsqu'un groupe expulse quelqu'un avec lequel il ne se sent pas en accord, est-ce qu'il est anormal ?

Guy Darcourt : on déborde ici dans le domaine de la psychosociologie. Est-ce le sujet expulsé qui n'est pas acceptable ou est-ce le groupe ? Les concepts de la psychologie individuelle ne sont plus suffisants il faut faire appel à ceux de la psychosociologie.

René Dars, Patrice Crossa-Raynaud : le texte de notre confrère Darcourt –que je vous invite à lire- est si riche que nous vous proposons de continuer à en débattre lors de notre prochaine réunion.

4- **Les statuts.**

Des propositions ont été faites pour modifier éventuellement nos statuts. Elles portent sur des points mineurs dont il conviendra de discuter, en n'oubliant pas que cela impliquerait de déposer les statuts modifiés à la Préfecture pour qu'ils paraissent au Journal Officiel.

En revanche, il fallait envoyer une information sur nos assemblées générales annuelles concernant la composition du bureau. Cela n'avait pas été fait les années précédentes.

Une lettre a donc été envoyée à la Préfecture, au service des associations, pour donner la composition du bureau pour l'année 2010.

°

Prochaine réunion
le jeudi 18 mars 2010 à 17 heures
au siège : Palais Marie Christine - 20 rue de France
06000 NICE

.

Annonces

Notre Collègue Antoine Fratini, qui est Président de l'Association Européenne de Psychanalyse (AEP), membre de l'Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences (AEIS), Directeur du Festival de la Psychanalyse de Fidenza (Italie) et auteur de nombreux ouvrages dont *La psychanalyse au bûcher* (Le Manuscrit, Paris 2009) nous fait part de la publication de son dernier ouvrage auprès des Editions EDILIVRE :

La statue du psychanalyste?

Quel statut, quelle liberté?

Par Antoine Fratini

Thème : Psychologie / Psychanalyse
Genre : Essai / Critique / Chronique
100 page(s) noir et blanc
Format classique 13/20 cm
Ouvrage publié le 18/02/2010

Résumé :

Le débat autour de la nature, du statut et des buts de la psychanalyse, née comme *Talking cure* mais devenue rapidement une discipline dépassant largement le cadre thérapeutique, a toujours été très ouvert et n'est pas encore conclu. Il existe en effet des avis très contrastants à ce sujet. Freud lui même en donnait une double définition : d'une part un moyen d'investigation des processus psychiques (inconscients) inexplicables autrement, de l'autre une méthode thérapeutique basée sur cette même investigation. Le second aspect consiste donc en une application du premier à des fins thérapeutiques. Ce qui change en premier chef est la finalité qui passe de la « connaissance de soi » à la « cure de soi » (ou des symptômes).

Documents

Pour étayer les propositions du Pr Marc BARBUT, nous vous proposons deux de ses textes :

p. 12 : Sur la formalisation dans les sciences sociales, publié dans *Histoire &Mesure, 1994, IX-1/2, 5-12*

p.18 : Les mathématiques et les sciences humaines : esquisse d'un bilan *Extrait de « L'ACTEUR ET SES RAISONS » Mélanges en l'honneur de R.BOURDON Paris PUF 1999*

.

SUR LA FORMALISATION DANS LES SCIENCES SOCIALES

Par Marc BARBUT

Histoire &Mesure, 1994, IX-1/2, 5-12

Je développerai succinctement ici trois idées, qui pour moi sont autant de truismes (mais il n'en va peut-être pas ainsi pour tout le monde).

1.Première idée : formaliser, c'est mathématiser.

2. Seconde idée: ce qu'on formalise, c'est toujours une théorie. C'est la règle: « ayons la tête sur les épaules .... » mais il faut la compléter par : « ... et aussi les pieds sur terre ».

3. C'est là, la troisième idée: une formalisation ne vaut que par sa vérification empirique.

1.Formaliser, c'est mathématiser

Voici quelques illustrations, tirées de la longue histoire, multiséculaire, des rapports qu'entretiennent les mathématiques avec les sciences de l'Homme.

1.1. Il y a d'abord quelques grandes réussites, une ou deux par siècle à l'époque moderne, celles qui donnent naissance, à partir de questions relevant des sciences sociales, à de nouveaux domaines des mathématiques. Ce qu'on peut appeler des «macro-formalisations ».

Je citerai en premier deux grands groupes.

- ***Le calcul des probabilités***, et sa filiation: *statistique* ***mathématique, théorie des jeux*** (ou praxéologie mathématique).

C'est en effet des problèmes posés par la décision, que nous dirions aujourd'hui rationnelle, face à l'incertain résultant du hasard que naît dans la seconde moitié du 17^e^ siècle (Blaise Pascal: 1654) le calcul des probabilités.

Mais certes pas *ex nihilo*, ou pour le seul divertissement, comme l'aurait dit le même Blaise Pascal, de résoudre des problèmes amusants sur les jeux de hasard; comme l'a bien montré Ernest Coumet[1], par exemple, tout un contexte social y préparait: la question des assurances (maritimes notamment), et du «juste prix» du risque encouru, était l'une de celles qui ont occupé des esprits depuis plus d'un siècle à l'époque.

C'est d'ailleurs dans cette même seconde moitié du 17^e^ siècle qu'apparaissent les premières tables de mortalité; Jacques Bernoulli pose, à la fin du siècle, les premiers principes de la statistique inférentielle (Ars Conjectandi - publié au début du 18^e^ siècle, huit ans après sa mort), et entend bien l'appliquer à des domaines relevant des « sciences morales ».

[1] Ernest COUMET, La théorie du hasard est-elle née par hasard? in *Annales,* 3, juin 1970.

Tout le siècle des Lumières sera d'ailleurs, en ce qui concerne le calcul des probabilités et la statistique, tourné vers ce type de préoccupations: rentes viagères, tontines; jugements; décisions collectives. Attitude qui culminera avec la mathématique sociale de Condorcet.

La théorie des jeux de stratégie, enfin, que notre siècle développera (E. Zermelo, E. Borel, J. von Neumann) prend en compte, dans les questions de décision rationnelle non seulement l'incertitude (quant aux conséquences des décisions possibles) due au «hasard », mais celle qui résulte de prises de décisions indépendantes (ou éventuellement interdépendantes) d'autres agents, d'autres acteurs embarqués sur la même galère: toute l'économie théorique s'en trouva renouvelée, et profondément influencée dans ses développements ultérieurs.

- Second groupe, celui de la *logique mathématique,* qui elle aussi a sa filiation: *linguistique formelle,* d'une part, *informatique théorique* d'autre part.

Là, la naissance est plus récente (G. Boole, au milieu du 19e siècle) encore que, sans vouloir remonter à Aristote, certains philosophes médiévaux (Anselme de Cantorbery, Guillaume d'Okham, par exemple) semblent avoir été bien proches de la formalisation; et plus tard Leibniz, entre autres.

L'objectif, pour la logique mathématique, est d'algébriser non tout le langage (nous en sommes probablement encore très loin) ni même le langage dans ses manifestations argumentaires, mais, beaucoup plus modestement, le langage du mathématicien faisant des mathématiques; la tâche est néanmoins immense, et loin d'être achevée.

Cependant, les modernes ordinateurs sont directement issus, dans leur conception, de cette ambition et des champs nouveaux qu'elle a ouverts en mathématiques «pures»; et être capable de remplacer l'homme calculant par une machine n'est pas déjà un mince résultat.

Il y a d'autres exemples, moins connus, de mathématisations réussies dans les domaines des sciences de l'Homme, avec création de nouveaux chapitres des mathématiques; par exemple:

- les chaînes de Markov (début du 20e siècle) en calcul des probabilités, dont dérive toute la moderne théorie des processus stochastiques, aux multiples applications; le problème initial de Markov relevait de l'analyse textuelle: enchaînement (aléatoire, mais avec dépendance temporelle) des voyelles et des consonnes dans des textes écrits[2],

- la théorie des structures ordonnées (fin du 1ge siècle) où ce qui est formalisé ce sont les règles syntaxiques des comparatifs et des superlatifs, et les pièges qu'ils recèlent (paradoxes) lorsque l'ordre est partiel, ou que l'infini est en jeu; nouvelle rencontre avec une très ancienne préoccupation de la philosophie médiévale.

1.2. Mais il y a aussi toutes les mathématisations de situations particulières, d'expériences ou d'observations spécifiques, qui ne sont plus génératrices de champs nouveaux des mathématiques mais empruntent leurs outils aux théories existantes ; c'est là le domaine des «modèles mathématiques », celui de la « micro-formalisation », dont quelques exemples récents qui ont eu leur heure de célébrité sont fournis par:

- la théorie des systèmes élémentaires de parenté (qui relève de la théorie algébrique des

[2] Micheline PETRUSZEWYCZ, *Les chaînes de Markov dans le domaine linguistique* Slatkine, Genève, 1981.

groupes finis)[3],

- les «réseaux sociaux» chers à certains sociologues (théorie des graphes et des hypergraphes),

- tout récemment, modélisation des jeux sportifs (théorie mathématique des jeux, théorie des graphes)[4].

1.3. Dans tous ces exemples, il s'agit bien de formalisation au sens où je l'entends ici, car les variables pertinentes en jeu sont toutes identifiées, et les équations ou les relations qui les lient sont écrites sous forme algébrique; on peut dès lors calculer (algébriquement) dans le modèle, et en dériver des conséquences; et surtout déterminer comment se modifient ces conséquences lorsque les « paramètres» entrant dans le modèle sont eux-mêmes modifiés.

Tout autre est la situation dans des cas où, parce qu'il y est fait un grand usage de l'ordinateur, on pense qu'il s'agit de formalisation, alors qu'il n'en est encore rien.

C'est ainsi qu'en général, ce qu'on met sous le mot *simulation,* ou une bonne partie de ce que recouvre *l'intelligence artificielle* (robotique, systèmes experts) ne relève pas de la formalisation, mais au mieux d'une *pré-formalisation* (l'informatique impose des contraintes, j'y reviendrai) qui, si elle constitue un progrès, n'en permet pas pour autant la compréhension profonde du phénomène simulé.

La même remarque concernant ce qui n'est pas encore formalisation s'applique à beaucoup de ces théories «formelles» qu'a engendrées, ces dernières décennies, la vogue du structuralisme dans les sciences de l'Homme.

2. Si toute théorie, même dite «formelle» n'est pas nécessairement une formalisation on ne peut, inversement, formaliser qu'une théorie, qu'elle soit «formelle» ou non.

2.1. Dans leurs rapports avec les autres disciplines, que celles-ci relèvent des sciences de la matière, de celles de la Vie, ou des sciences de l'Homme, les mathématiques ne s'intéressent pas aux phénomènes «concrets» étudiés; c'est là l'affaire des spécialistes de ces phénomènes.

L'objet des mathématiques, c'est non le phénomène étudié en soi, mais ce qu'a à en dire le spécialiste. Comme G. Th. Guilbaud l'a souvent répété, il s'agit de ce qui est dans la tête du spécialiste: sa théorie du phénomène.

Il faut bien comprendre ce point ; ce que formalise, par exemple, la mécanique classique, ce sont les «lois » découvertes empiriquement par les Galilée et les Kepler; de même, lorsqu'André Weil, vers 1942, construit un modèle mathématique (relevant de la théorie des groupes finis) pour le système de parenté Kariera, par exemple, ce qu'il formalise, c'est la théorie élaborée par Claude Levi-Strauss sur ce système de parenté[5].

Bien sûr, il est souvent arrivé dans le passé que l'expérimentateur, le théoricien et le

---

[3] Note d'André WEIL in Claude LEVI-STRAUSS, *Les systèmes élémentaires de parenté,* P.U.F., Paris, 1949

[4] Pierre PARLEBAS, Modélisation du jeu sportif: le système des scores du volley-ball in *Mathémaliques et Sciences humaines,* n° 91, Automne 1985. Pierre PARLEBAS, Les jeux de paume: système de scores, morphismes et paradoxes, in *Mathématiques et Sciences humaines,* n° 92, hiver 1985.

[5] Note d'André WEIL in Claude LEVI-STRAUSS, *Les systèmes élémentaires de parenté,* P.U.F., Paris, 1949

mathématicien qui formalise la théorie soient le même homme; c'est de moins en moins vrai: rançon inéluctable du développement des sciences, et de leur spécialisation.

Cette remarque implique que les mathématiciens qui se piquent d'appliquer leur discipline dans certaines sciences sociales fassent l'effort d'une initiation minimum à celles-ci, qui permette une collaboration fructueuse avec les spécialistes, et soient ouverts au travail en commun puisque ce qui importe avant tout, c'est de bien comprendre ce que le spécialiste a dans sa tête; ce n'est malheureusement pas toujours le cas. La tour d'ivoire a bien des charmes; et vive la pluridisciplinarité!

2.2. Mais cette remarque implique aussi que si le spécialiste n'a rien dans sa tête (i.e., n'a pas de théorie), il n'y a évidemment rien à formaliser.

C'est là qu'il convient d'observer que ce qu'on appelle couramment « analyse des données », et la façon dont on la pratique assez usuellement, n'a rien d'une formalisation; c'en est même exactement le contraire.

Le principe en est, en effet, d'extraire les «lois» auxquelles obéiraient les faits observés sans théorie préalable sur ceux-ci; et la pratique s'est instaurée au début des années 70, d'apporter ses bacs de cartes, bandes et autres disques à manger à l'ordinateur, dans l'espoir qu'après avoir mouliné vos données à la sauce « machin» ou selon la recette « truc» il vous les restituera munies d'un ordre qui se trouverait dans les choses, et non dans votre tête.

Ajoutons qu'en général la façon dont est composée la sauce ou fabriquée la recette est totalement opaque pour l'utilisateur, qui perd ainsi tout contrôle sur le traitement opéré.

Soyons clairs: une analyse statistique (empirique) de données d'observations n'a de chance de faire avancer dans la compréhension de celles-ci que si l'on a formulé prélablement un minimum d'hypothèses que l'analyse confirmera, ou infirmera; et ceci est d'autant plus important que la *méthode d'analyse la plus adéquate* ou la moins inadéquate est *largement fonction* de la ou des *questions que l'on se pose,* et des propriétés mathématiques éventuelles des variables en jeu.

En bref: si l'on ne sait pas ce que l'on cherche, on n'a guère de chance de le trouver; autant, dans ce cas, aller chez Madame Soleil.

2.3. La situation que je viens de décrire est hélas trop fréquente; je la date du début des années 70; c'est en effet à cette époque que furent simultanément offerts aux chercheurs en sciences sociales des méthodes statistiques puissantes, mais de maniement délicat qui suppose qu'on en connaisse bien la géométrie (je dis bien géométrie ; et bien des jeunes statisticiens la connaissent mal, cette géométrie; sans parler des informaticiens, dont la culture en la matière est souvent quasi nulle) d'une part, de puissants moyens de mise en œuvre automatisée de ces méthodes d'autre part.

D'où une absence trop fréquente de réflexion (c'est tellement plus simple d'appliquer un logiciel) et surtout une perte du contact avec les données, de la connaissance intime de celles-ci, cette connaissance que l'on acquiert après les avoir longuement manipulées, avec ses mains, bien sûr, mais aussi et surtout avec sa tête, qui me semble le plus nécessaire des devoirs du chercheur.

L'époque n'est pourtant pas si lointaine où un Jean Meuvret, pétrissant à longueur de journées les chiffres de ses mercuriales, inventait, tout historien qu'il était, des méthodes astucieuses de lissage des séries chronologiques, qu'un peu de travail de mathématicien pouvait ensuite mettre en forme. Seulement, Jean Meuvret n'avait pas d'ordinateur à sa disposition.

Je pense que l'informatique est, en ce qui concerne ma discipline, très largement responsable du déclin de la pluridisciplinarité.

Bien sûr, le rôle de l'informatique n'a pas été que négatif dans les sciences de l'Homme; ce rôle a même été positif dans les disciplines, et pour les recherches, où elle oblige - parce que son utilisation nécessite de définir sans ambiguïté les objets traités, et les relations qu'ils peuvent avoir entre eux - à ce que j'ai appelé plus haut une « préformalisation » ; c'est souvent le cas, notamment, dans les sciences du langage.

Et d'autre part les mathématiques de l'informatique théorique ont eu une influence non négligeable sur toute la linguistique « formelle », ou formalisante.

Autre note d'optimisme sur ce point des rapports des sciences de l'Homme avec l'Informatique: il est possible que la généralisation de la micro-informatique améliore le contact du chercheur avec le traitement de ses données dans la mesure où il les traitera lui-même; mais le pire est également possible.

3. Si formaliser (mathématiquement) suppose une théorie, la formalisation inversement ne vaut que dans la mesure où des vérifications empiriques viennent l'étayer.

Et c'est ici - plutôt que dans la découverte des lois cachées auxquelles obéiraient les phénomènes étudiés - que se situe le vrai rôle des méthodes statistiques.

3.1. Du travail accompli - durement - avec votre tête et avec vos mains, de ce que j'appelais plus haut la connaissance intime de ce que vous étudiez, vous avez tiré un rudiment de théorie, des hypothèses.

Si la théorie est formalisable, peut se traduire par des expressions mathématiques (par exemple, et pour citer des cas que je connais bien, la forme de l'expression algébrique de telle distribution de population, ou de l'évolution dans le temps de tels taux de scolarisation), la *statistique descriptive* est à même, convenablement utilisée, de vous fournir des estimations des paramètres intervenant dans le modèle, et des mesures *(des* mesures: il est prudent en la matière de ne pas se contenter d'une seule) de l'écart du modèle aux observations: c'est ce qu'on appelle l'ajustement.

Si l'ajustement est bon, vous concluerez non que la théorie est « vraie» (la vérité n'est que dans votre tête) mais que vous êtes dans la bonne direction pour comprendre le phénomène étudié; et pour que la conviction qui est vôtre passe dans d'autres têtes.

S'il est mauvais, c'est qu'il faut changer votre théorie; et là aussi, vous aurez beaucoup avancé dans la compréhension.

Mais outre la statistique descriptive, qui s'applique aussi bien à des modèles déterministes qu'à des modèles probabilistes (c'est-à-dire attribuant au «hasard» une part de l'explication des phénomènes), il y a la *statistique inférentielle* dont l'objet est de tester, la validité des hypothèses, et qui notamment met en forme « opératoire» le concept *d'expérience cruciale* introduit par Francis Bacon.

Là aussi, le test ou tout autre méthode inférentielle (l'inférence est ici d'une observation sur une petite partie de la « population» étudiée à l'ensemble de cette population) ne permettra jamais de conclure à la vérité, ou à la fausseté des hypothèses formulées; tout au plus fournit-elle, selon les cas, soit une présomption rationnellement communicable de l'adéquation des hypothèses aux observations, soit une mise en garde: un clignotant s'allume.

3.2. De ces dernières remarques, il découle a contrario que ne sont pas de « bonnes» formalisations celles qui ne comportent pas de moyen de vérifier leur adéquation aux observations.

C'est en général le cas, pour les sciences humaines (la situation est tout autre pour certaines branches de la Physique ou de la Mécanique) des « modèles » relevant de la théorie mathématique des catastrophes ou de la théorie des systèmes dynamiques.

Non que ces théories n'aient leur utilité: elles peuvent être génératrices d'idées fécondes. Mais je ne vois guère qu'un exemple (et encore s'agit-il de démographie, et d'un cas où une formalisation moins sophistiquée était parfaitement possible) d'une application de la théorie des système dynamiques, au vrai sens du terme application: c'est-à-dire, avec la possibilité et la mise en œuvre de la vérification (empirique) que la théorie s'applique effectivement[6] .

Dans les cas contraires, nous sommes de nouveau sur la tour d'ivoire, chère aux mathématiciens et aux philosophes.

3**.3**. Il faut conclure ces quelques notes; et la conclusion, c'est le gros bon sens qui nous la fournit: «in medio stat virtus », ou encore, comme le disait à peu près notre ami Blaise Pascal: «trop et trop peu de vin; donnez-lui en trop, il ne saura trouver la vérité, donnez-lui en trop peu, de même».

Je veux dire qu'entre le régime sec, proche d'une certaine forme d'obscurantisme, d'une certaine pratique de 1'« analyse des données» et l'ivresse d'une mathématique coupée de l'empirisme, il faut tenter de raison garder : entre la théorie et sa mathématisation, et l'empirisme appuyé de bonnes méthodes statistiques, les allers et retours doivent être permanents.

C'est là, dans les rapports entre les Mathématiques et les sciences de l'Homme, le seul juste milieu.

Marc BARBUT *EHESS/CAMS*

[6] Cf. Thèse de Doctorat de Noël BONNEUIL, Reconstruction dynamique des populations du passé, EHESS, mai 1991.

Les mathématiques et les sciences humaines.
Esquisse d'un bilan

Extrait de « L'ACTEUR ET SES RAISONS » Mélanges en l'honneur de R.BOURDON Paris PUF 1999

Dans ces quelques pages, je m' efforce d'indiquer de façon aussi concise que possible quelles sont les caractéristiques principales des rapports qu'entretiennent les Mathématiques avec les Sciences de l'Homme et de la Société depuis plusieurs siècles.

Il y est question des usages, mais aussi de ce qu'ils devraient être. Et surtout de quelques grands événements dans l'histoire de la pensée.

Les idées que j'ai essayé de rassembler ici étaient dispersées dans plusieurs textes antérieurs. Elles ont toujours été les miennes (et pas seulement les miennes, fort heureusement) .

J'ajoute qu'en ces temps où les dogmes mous du « relativisme » et de la « déconstruction » ont une telle vogue dans certaines sphères des « Science Studies » , il ne m'a pas paru inutile de rappeler quelques faits ni d'affirmer des convictions.

Des mathématiques aux sciences humaines: bons et moins bons usages

A propos des applications des mathématiques aux sciences sociales ou aux sciences humaines, la première chose qu'il convient de souligner, c'est *qu'il n'y a pas de mathématiques qui soient spécifiques à ces disciplines.* Il s'agit des mêmes que celles que l'on retrouve dans d'autres domaines d'applications que ce soient les sciences physiques, les sciences naturelles, ou l'art de l'ingénieur.

Je l'affirme d'autant plus volontiers que j'ai eu autrefois l'imprudence de publier un cours de premier cycle destiné à des étudiants de géographie, psychologie ou sociologie sous l'intitulé « Mathématiques des sciences humaines » [1]. Or, quel en était le contenu? De l'Analyse combinatoire, du Calcul des probabilités, beaucoup d'Algèbre linéaire et des applications de celle-ci à la statistique descriptive. Rien d'autre, donc, que certains des chapitres que l'on trouvera dans n'importe quel manuel de mathématiques pour les classes terminales scientifiques ou les classes préparatoires aux écoles d'ingénieur.

D'ailleurs, *quelques exemples* plus ou moins célèbres de modélisations mathématiques dans les sciences sociales montrent bien cette non-spécificité. - Les « systèmes élémentaires de parenté » de Claude Lévi-Strauss; la théorie mathématique de certains d'entre eux est une application de celle des groupes de permutations (cf [14] et son appendice par A. Weil).

- En Psychologie expérimentale, les théories de l'apprentissage formulées par B. F. Skinner et quelques autres sont mathématisées par des processus stochastiques (cf [20]) : nous sommes ici dans un domaine du Calcul des probabilités, celui des chaînes de Markov. Notons, à propos de cet exemple, qu'il revient à la mode dans les années 90 à propos de ce qu'on appelle les « sciences cognitives» ..

- C'est encore les chaînes de Markov qui s'appliquent dans certaines modélisations, en Sociologie, des phénomènes de mobilité sociale ou de modification des opinions (cf [5] et [6]), ou encore, en Linguistique et dans l'étude des textes, à l'analyse des séquences de phonèmes ou de graphèmes. Dans ce dernier cas, c'est A. A. Markov lui-même qui est l'auteur de la première application. Nous en reparlerons plus loin.

- En Sociologie et en Psychologie sociale, les réseaux sociaux relèvent pour l'essentiel, quant aux quelques méthodes mathématiques qui s'y appliquent, de la théorie des graphes et de la combinatoire.

- En Géographie humaine, l'analyse des images satellitaires se fait surtout au moyen d'opérateurs linéaires, comme aussi en imagerie médicale. - La Sociologie du sport a trouvé dans la théorie mathématique des jeux (qui par ailleurs est l'outil essentiel de la théorie économique) le cadre formel et les concepts de base adéquats pour la description des jeux sportifs (cf [18]).

Ces quelques exemples montrent la diversité des domaines des mathématiques qui sont en jeu. Ils montrent surtout deux choses.

La première est que, dans chaque cas, il s'agit d'une application à l'étude d'un phénomène bien délimité, et partant limité, spécifique de l'une des Sciences sociales.

On parle parfois de Psychologie mathématique ou de Sociologie mathématique, comme d'Économie mathématique ou de Démographie mathématique ; et l'on n'a pas tort. Mais les mathématiques intervenant dans chacune de ces disciplines relèvent comme en physique mathématique, par exemple, de domaines épars des mathématiques utilisées pour des chapitres non moins épars de la discipline en question.

La seconde remarque est que dans chaque cas, *ce qui est mathématisé,* c'est non le phénomène étudié lui-même, mais *la théorie qu'en fait le spécialiste* de la discipline dont il relève: dans le premier exemple rappelé ci-dessus, ce que mathématise A. Weil, ce n'est pas tel système de parenté, c'est la théorie qu'en a construit l'anthropologue C. Lévi-Strauss.

Ceci ne doit jamais être perdu de vue. Il serait parfaitement vain de vouloir construire une modélisation mathématique d'un phénomène, qu'il soit social ou naturel, pour lequel il n'y a pas le préalable d'une théorie élaborée par la discipline dont il relève.

Ceci est particulièrement vrai lorsque sont mises en œuvre des méthodes statistiques dites *d'analyse des données.*

Depuis le début des années 1970, certaines d'entre elles ont été vulgarisées, et leur utilisation a été grandement facilitée par le recours à la puissance de calcul des ordinateurs. Trop de chercheurs en Sciences sociales ont dès lors pris la détestable habitude de confier leurs « données », de plus en plus abondantes d'ailleurs (trop abondantes, on y reviendra), à un ordinateur, en vue de les faire passer à la moulinette de tel ou tel programme d'analyse statistique : la vérité en jaillira, sous forme le plus souvent de « sorties graphiques» et l'on pourra *ensuite* bâtir tout un discours d'interprétation. Comme chez la cartomancienne.

Or la géométrie dans laquelle s'inscrivent ces méthodes est loin d'être triviale, et elle est totalement opaque au géographe ou au sociologue « lambda»; elle l'est d'ailleurs autant à la plupart des techniciens de l'informatique.

D'autre part le recours au traitement automatisé des « données» fait perdre à celui qui est censé les étudier la connaissance irremplaçable qui s'acquiert par leur lente et constante manipulation. Et ce n'est pourtant qu'à partir de cette manipulation, et de la réflexion qui l'accompagne, que peut s'élaborer la théorie.

Ne recourir qu'à ces méthodes relève donc pour une large part d'une forme moderne de l'obscurantisme; tout au plus peuvent-elles servir, cornme des statisticiens l'enseignent avec bonheur, à une phase « exploratoire» dans l'étude des « données ». Mais elles ne dispensent en aucun cas d'une théorie qui ne peut sortir que de la tête du chercheur, et non pas de son ordinateur : si l'on ne sait pas ce que l'on cherche, on a peu de chances de le trouver.

D'ailleurs, et pour en finir sur ce point, les grands créateurs que furent par exemple V. Pareto ou E. Durkheim, eux qui ont effectivement trouvé des lois quantitatives ou mathématiques, toujours valables aujourd'hui, pour certains phénomènes sociaux, de quels ordinateurs disposaient-ils? Ils travaillaient sur de *petites séries,* il faisaient leurs *calculs à la main,* et ils se servaient beaucoup de leur cervelle.

Mais il est un second écueil à éviter dans la modélisation mathématique.

Contre celui qu'on vient d'évoquer (le recours aveugle aux programmes informatiques d'analyse des données) on peut se prémunir en respectant le précepte « ayons la tête sur les épaules» ; le second écueil relève du complément nécessaire à ce premier précepte: « mais ayons aussi les pieds sur terre ».

Je veux dire par là que l'on a vu ces deux dernières décennies, tout à l'opposé de l'utilisation « au ras des pâquerettes» de quelques outils de la Statistique, des « applications» de théories mathématiques récentes et très élaborées, « applications» dont leur seul rapport au réel n'est souvent que celui d'analogies plus ou moins bien précisées. Je pense à l'usage fait par certains du langage et des concepts de la géométrie différentielle ou de la théorie des systèmes dynamiques (le « chaos» est vraiment très plaisant, et les « attracteurs étranges» attirent étrangement) sans que jamais ne soit proposée une vérification empirique de la validité des formulations mathématiques énoncées.

Ici, on plane dans les hauteurs. Il est des cas (quand il s'agit de certains concepts philosophiques d'Aristote, par exemple) où la vérification empirique semble difficile en effet, voire impossible. Mais dans d'autres, dont traitent notamment les sciences dites « cognitives », ce devrait être le premier souci du modélisateur que de tester les hypothèses de sa théorie par leur confrontation aux observations. Et c'est là que la Statistique (la statistique inférentielle, notamment) doit être mise en œuvre, avec toute la palette de méthodes qu'elle propose pour porter un jugement rationnel sur l'adéquation des modèles aux faits observés: ajustements, estimation, tests d'hypothèses, etc. La réponse sera rarement par oui ou par non, mais seulement par un plus ou moins grand degré de probabilité. C'est déjà beaucoup.

Or ce *retour aux observations* est trop souvent oublié. Pas toujours, cependant, et notamment dans les applications de la théorie des systèmes dynamiques à la Démographie que l'on peut par exemple trouver dans [4]. Sans doute est-ce parce que les démographes sont, de par leur métier, bien obligés d' « avoir les pieds sur terre» : on ne peut dire n'importe quoi sur ces indicateurs objectivement observés périodiquement que sont les tailles des populations, les taux de fécondité ou ceux de mortalité.

Mais le cas le plus exemplaire, le plus édifiant si j'ose dire, de ce que doit être l'attitude intelligente de retour à l'observation nous est fourni par le grand mathématicien A. A. Markov. Dans la première décennie de ce siècle, il crée la théorie mathématique abstraite des probabilités en: chaînes, que nous appelons maintenant les *chaînes de Markov* : il s'agit là d'un domaine nouveau, et qui se révélera très fécond par la suite, du Calcul des probabilités; il a son origine dans des questions de mathématiques que se posent d'autres mathématiciens contemporains (P. 1. Tchebichev et H. Poincaré, notamment). Développement interne à la discipline donc.

Or, dès 1913, A. A. Markov « met les mains dans le cambouis» pour tester la validité de sa théorie; et il le fait en comptant, dans un long texte de la littérature russe *(Eugène Onéguine,* de Pouchkine), les alternances de voyelles et de consonnes (la chaîne a deux « états », dans cette application), et en dénombrant - il y faut beaucoup de soin et de patience quand c'est fait « à la main» - les digrammes (enchaînements d'ordre 1), les trigrammes (ordre 2), voire les tétragrammes, et élabore quelques tests d'adéquation (de l'observation à la théorie) adaptés à ce cas.

Et ça marche (cf [19]) ! Puisse la leçon de réalisme donnée par le mathématicien pur que fut A. A. Markov n'être jamais oubliée.

Des sciences humaines aux mathématiques :
deux grands moments (sternstunden)
dans l'histoire de la pensée

Passons maintenant à ce qui est pour moi l'essentiel dans les rapports des mathématiques avec les Sciences sociales. Non plus l'application d'outils mathématiques disponibles à la modélisation de phénomènes relevant des disciplines des sciences sociales, mais au contraire la création de domaines nouveaux des mathématiques à l'occasion de problèmes posés dans ces disciplines, et l'influence qu'elles ont pu avoir sur l'histoire ultérieure de ces domaines nouveaux.

Certains mathématiciens (le grand algébriste André Weil, par exemple) pensent que les sciences humaines n'ont jamais eu aucune influence sur leur discipline. Eh bien, ils ont tort, et ça devrait se savoir.

Il est vrai que l'évolution des mathématiques, la création de théories et de concepts nouveaux en mathématiques sont principalement et de plus en plus nourris par les questions que cette discipline se pose à elle-même: développement pour l'essentiel autonome, donc, par rapport à l'environnement que constituent les autres sciences.

Il est vrai également que les problèmes posés par d'autres disciplines et qui ont été à l'origine de la création d'outils nouveaux des mathématiques (c'est quand même parfois arrivé, surtout dans les siècles passés) sont le plus souvent venus de l'Astronomie, de la Mécanique ou de la Physique, bref, des sciences « exactes », ou même de l'art de l'ingénieur.

Il est cependant deux grands domaines des mathématiques qui sont nés de questions relevant des sciences sociales ou humaines, et leur doivent une large part de leur développement ultérieur :

- le Calcul des probabilités (avec le prolongement qu'en constitue la Statistique mathématique et l'élargissement qu'en est la moderne « théorie des jeux »);

la logique mathématique et ses ramifications telles que la théorie des langages formels ou l'informatique théorique.

Le Calcul des probabilités et sa postérité

D'abord, le *calcul des probabilités.* Bien sûr, il y a une préhistoire : G. Cardano au XVIème siècle, voire l'Antiquité latine. Mais sa naissance officielle, c'est au cours de l'été 1654 qu'elle se situe , lors d'une correspondance entre Pierre Fermat et Blaise Pascal au sujet du célèbre « problème des partis ».

De quoi s'agit-il ? D'un jeu de pile ou face, qui se joue en plusieurs coups, entre deux joueurs ; si l'on termine la partie, il y a un gagnant et celui-ci ramasse la mise. Mais si l'on s'interrompt en cours de partie, comment faut-il faire le partage (le « parti ») de la mise, compte tenu des points déjà gagnés par l'un et l'autre des joueurs? En général, lorsque l'on s'arrête ainsi en cours de route, l'un d'entre eux a plus de «chances» de gagner que l'autre. Mais de combien? Et quel est le juste partage?

C'est Blaise Pascal qui trouve la solution: calculer *l'espérance* (le terme a survécu, pour désigner le même objet: l'espérance mathématique) de chaque joueur, et partager la mise en proportion de leurs espérances respectives. Pour déterminer celles-ci, il donne la règle d'enchaînement des espérances entre une position du jeu et celles qui peuvent lui succéder (espérances et probabilités conditionnelles dans le langage actuel), et construit le « triangle arithmétique» qui est nécessaire pour les calculs qui en résultent.

Ainsi, le Calcul des probabilités, qui est aujourd'hui, trois cent cinquante ans après, l'une des branches les plus vivantes, et les plus fécondes en applications des mathématiques, est né d'un problème de *décision:* celui d'une décision à prendre (celle du partage, en l'occurrence) lorsque l'on est dans *l'incertitude* quant à l'avenir (la partie aurait plusieurs façons possibles de se terminer, au moment où il faut décider du partage), et donc quant aux conséquences éventuelles de la décision que l'on prend. Est-il une situation relevant plus de la « condition humaine» que celle-ci, et même plus tragiquement humaine (que l'on pense au « pari de Pascal ») ? Car il ne faut pas s'y tromper; les jeux de hasard ne sont là que l'occasion d'élaborer, sur des situations épurées et simplifiées, cette « géométrie du hasard» qui permettra de traiter avec les outils mathématiques adéquats d'autres cas de décisions face à l'incertain, de ceux que l'on rencontre dans la « vie réelle» : contrats d'assurances, rentes viagères, ainsi que nombre de décisions de nature juridique, bien présentes dans les esprits des contemporains de Pascal ou de leurs pères. Sur la naissance du Calcul des probabilités, le problème des partis, et le contexte social de cette naissance, on peut consulter [7] avec profit.

Blaise Pascal se désintéressa assez vite de ces questions, tout au moins en ce qui concerne leur traitement par les mathématiques. Il eut des successeurs immédiats: Christian Huygens qui écrivit le premier traité *(De ratiociniis in ludo alae,* 1657) et auquel on doit semble-t-il, le terme de « probabilité» dans son sens technique; G. W. Leibniz, qui, lors de son séjour à Paris en 1675, prit connaissance des textes laissés par Pascal et traita plusieurs problèmes de jeux de hasard, dont, de nouveau, celui des partis.

Avoir un Calcul des probabilités, une « géométrie du hasard », est une chose; l'appliquer aux situations concrètes évoquées ci-dessus, et pas seulement au cas assez artificiel des jeux de société, en est une autre.

C'est là qu'intervient la *Statistique.*

Statistique *descriptive,* d'abord, car ces situations, il faut les décrire, les représenter de façon aussi exacte que possible, tenir des listes (ou des états) des cas possibles, constituer des catégories pertinentes. Il faut donc compter; et ce sont les hommes, leurs naissances et leurs morts que l'on comptera en premier, en Angleterre, avec John Graunt et William Petty notamment, et ceci dès les années 1660-1670. La question dont il s'agit est celle de l'estimation de ce que nous appelons aujourd'hui *l'espérance de vie,* en vue de rationaliser le calcul des rentes viagères (et de nos jours, des assurances sur la vie, notamment).

Il est très remarquable que, de façon indépendante semble-t-il, Calcul des probabilités et Statistique commencent au même moment. En paraphrasant E. Coumet [7] : ce n'est pas par hasard.

Statistique *inférentielle* ensuite, car les probabilités qui entrent dans le calcul de l'espérance (qui est, on le sait, la somme des gains - ou pertes - attendus pondérés par leurs probabilités), il faut les évaluer; c'est simple dans un jeu de cartes ou de dés; mais dans d'autres cas, comment faire?

La première réponse vient de Jacques Bernoulli, dès 1689 semble-t-il (elle ne sera publiée, dans *l'Ars conjectandi* qu'en 1713, après sa mort en 1705) : c'est la méthode rendue si familière de nos jours par la pratique des « sondages d'opinion », de l'estimation d'une probabilité (ou d'une proportion inconnue) par l'observation d'un échantillon tiré « au hasard ». Ce qui fonde la méthode - explicitement envisagée par J. Bernoulli dans la « Lettre à un ami sur le jeu de paume» figurant en appendice de *l'Ars conjectandi* - , c'est le théorème probabiliste qu'il démontre, et qui est connu sous l'appellation bien postérieure (le milieu du XIX^{e} siècle) de *loi des grands nombres.* Appellation assez impropre d'ailleurs, car la convergence en probabilité des fréquences observées sur l'échantillon vers la probabilité (ou la proportion) inconnue est assez rapide; même avec des tailles d'échantillon assez petites (quelques centaines ou moins), on a de bonnes estimations. Et, sous réserve de conditions assez générales, mais pas toujours remplies, il suffit d'un échantillon de quelques dizaines d'unités pour que soit utilisable l'approximation de la distribution de la moyenne des écarts par la loi de Laplace et Gauss.

Ce qui est patent, en tout cas, c'est que les «applications» auxquelles pense J. Bernoulli, et un peu plus tard son neveu et épigone (dans ce domaine) Nicolas Bernoulli *(De usu artis conjectandi in jure,* Bâle, 1715), ne sont nullement celles qui concernent les « erreurs de mesure» en géodésie ou en astronomie - cela viendra des décennies plus tard -, mais bien de celles qui relèvent des « sciences morales» ou du Droit.

Le Calcul des probabilités, et sa fille la Statistique, peuvent être situés dans un cadre plus vaste : celui de la théorie mathématique des décisions et de l'action, lorsque les conséquences de la décision prise sont *incertaines.*

Dans le cas des jeux de hasard, l'incertitude provient seulement du hasard, qui, comme chacun le sait, n'a « ni conscience, ni mémoire ». De même, la décision prise par le statisticien, au vu du résultat d'un test par exemple, d'accepter ou de rejeter l' « hypothèse H_0 », a un résultat incertain (le statisticien peut prendre la « mauvaise» décision), dont l'incertitude ne provient que du hasard (celui-ci porte dans le langage technique sur l' « état de nature»; d'autres, plutôt que du hasard, parleraient du Diable ou de la Providence).

Ce qui doit être clair, c'est que, dans un jeu ou dans une prise de décision, le *hasard* est cet adversaire dont, quoique je fasse, moi décideur, je ne pourrai en rien influer sur ses décisions; il ne réagit pas à mes propres actions; c'est ce que signifie l'adage rappelé plus haut: le hasard n'a ni conscience, ni mémoire.

Par contre, dans la plupart des jeux de société, comme dans les situations réelles de décision, on n'a pas affaire qu'à cet adversaire particulier, le hasard; il y a d'autres adversaires (et aussi, parfois, des partenaires), d'autres {(joueurs », tout aussi *rationnels* que moi, qui poursuivent leurs propres fins, et qui sont susceptibles de réagir à mes actes, par la conscience qu'ils en ont, et la mémoire qu'ils en gardent.

Ici l'incertitude où je suis des conséquences de mes décisions provient de ce que les autres agissent plus ou moins indépendamment de moi, et que je ne peux donc prévoir ce qu'ils feront; or le résultat dépend aussi de leurs actes, et pas seulement des miens.

C'est à la rationalisation et à la modélisation mathématique de ces situations générales de décision où interviennent deux « joueurs» ou plus (et le hasard aussi, éventuellement) qu'est consacrée la *Théorie des jeux* dont on fait généralement remonter l'acte de naissance à l'année 1944, celle de la parution de l'ouvrage fondateur de J. von Neumann et O. Morgenstern [16].

Celle-ci n'est cependant pas née *ex nihilo.* Certains de ses principaux concepts sont déjà présents chez des auteurs qui, tel N. Machiavel, ont réfléchi à l'action, à ses ressorts et surtout à sa logique et à ses normes (Cf [3], par exemple).

En fait, c'est dès le début du XVIIIe siècle qu'est ébauchée l'étude mathématique de certains {(jeux de stratégie», ceux dans lesquels intervient l'habileté des joueurs (cf l'article de G. Th. Guilbaud [12]).

A la fin du siècle, Condorcet comme.nce l'étude mathématique de la logique des décisions collectives (voir [13]). Puis suit une longue éclipse pendant le XIX^{C} siècle.

Il faut attendre le début du XX^{C} siècle pour qu'à la veille de la première guerre mondiale E. Zermelo démontre l'existence de stratégies optimales dans le jeu des échecs; vers 1920, E. Borel étend ce résultat à une classe étendue de jeux, ceux qui sont dits {(à information parfaite ».

C'est enfin vers 1928 que J. von Neumann élabore les principaux concepts d'une théorie générale des jeux de stratégie, et en démontre quelques théorèmes fondamentaux.

Comme pour les jeux de hasard pur, il est clair que la théorie des jeux vise à tout autre chose que les seuls jeux de société. Le titre de [16], {(Theory of games and *economic behavior»,* est parfaitement explicite sur ce point.

Et de fait, la théorie économique en fut entièrement renouvelée. Mais aussi l'Économie appliquée à la gestion de l'entreprise : la recherche opérationnelle née pendant la guerre de 1939-1945 de problèmes posés par la conduite d'opérations militaires et de leur logistique, s'applique ensuite à la rationalisation de la prise de décision pour les chefs d'entreprises civiles.

A l'heure actuelle, cette *praxéologie mathématique* (on dit encore : *mathématiques de la décision),* qui englobe Calcul des probabilités, Statistique et Théorie des jeux, est encore en plein développement. La théorie des systèmes dynamiques **lui** fournit des outils nouveaux; et la toute récente théorie mathématique de la *viabilité* **lui** donne des prolongements.

Il est vrai que la théorie des jeux, dont le champ d'application reste celui de la rationalisation des choix et des décisions et se situe donc nettement dans les « Sciences de l'Homme », a emprunté l'essentiel de ses outils aux mathématiques préexistantes: les concepts furent nouveaux, pas les domaines mathématiques utilisés.

Il est vrai également que, dans le monde contemporain, des applications nombreuses du Calcul des probabilités et de la Statistique ont pour objet des questions de physique ou de sciences de l'ingénieur. Mais leurs applications aux phénomènes sociaux n'en restent pas moins très vivantes, et parfois importantes pour la vie courante de l'individu et de l'entreprise, et pas seulement pour les besoins des laboratoires de psychologie expérimentale, ou ceux de lexicologie, par exemple. Qu'on songe notamment aux études de marché, aux sondages d'opinion, et surtout à tous les systèmes d'assurances.

Il ne faut jamais oublier, en tout cas, ce qui a été rappelé plus haut: leur origine se trouve, pendant la seconde moitié du XVIIe siècle, dans la réflexion sur des problèmes proches de ceux qu'on l'on vient d'évoquer (sondages d'opinion, assurances) et dans leur modélisation mathématique; déterminer le « juste parti (partage) » selon B. Pascal relève de la même logique que de déterminer la « juste valeur» d'une prime d'assurance.

Il reste un point à souligner. C'est que, dans cette histoire pluriséculaire des liens entre le Calcul des probabilités, la Statistique et les Sciences sociales, ces dernières furent aussi, en plusieurs occasions, à l'origine de la création de techniques nouvelles qui, le plus souvent, profitèrent surtout aux sciences dites « exactes ».

Voici les deux cas exemplaires.

Le premier en Statistique. J'ai indiqué plus haut que parmi les techniques les plus utilisées, que ce soit à bon ou à mauvais escient, il y a celles de l' « analyse des données» ; or pour l'essentiel, celles-ci sont issues de *l'analyse factorielle.* Cette dernière technique a été créée en 1904 non par un statisticien, mais par le psychologue britannique C. Spearman, et ultérieurement rendue plus intelligible par les méthodes géométriques du grand statisticien R. A. Fisher, puis améliorée dans les « années 30 » par L. L. Thurstone, autre psychologue.

A telle enseigne que, quand Georges Darmois, titulaire de la chaire de Statistique mathématique de l'Université de Paris, publie en 1940 un opuscule [8] intitulé *Les mathématiques de la psychologie,* son ouvrage traite en fait d'une initiation à l'analyse factorielle.

Ajoutons tout de même que depuis la dernière guerre, la Psychologie a fait appel à d'autres outils probabilistes ou statistiques: principalement les chaînes de Markov, comme cela a déjà été évoqué ci-dessus, l'analyse de la variance et la théorie des tests d'hypothèses.

Le second exemple relève à la fois de la Statistique (par sa découverte) et du Calcul des probabilités (par sa théorie mathématique). C'est celui des lois (probabilistes) stables par rapport à l'addition de variables aléatoires indépendantes, que l'on peut appeler distributions de Pareto-Lévy, du nom de leur inventeur, l'économiste et sociologue Vilfredo Pareto, et de celui de leur principal théoricien, le grand mathématicien probabiliste Paul Lévy.

Cette aventure commence en 1896., V. Pareto, titulaire de la chaire d'Économie de l'Université de Lausanne où il avait succédé à Léon Walras, étudie empiriquement, sur quelques dizaines d'exemples, la distribution statistique des revenus fiscaux (ce sont les seuls revenus pour lesquels on dispose de données, à l'époque de Pareto tout au moins).

A la fin du XIX^{e} siècle, la plupart des scientifiques ne connaissaient qu'un type de distribution statistique: la loi de Laplace et Gauss, ou « loi normale» («fameux « chapeau de gendarme »), elle-même dérivée de la loi binomiale, qui est celle des tirages aléatoires indépendants dans une ume, ceux de Jacques Bernoulli et de la « loi des grands nombres ».

Prenons un phénomène relevant typiquement de la loi de LaplaceGauss: la taille des conscrits, qui se distribue « normalement» autour d'une « valeur moyenne ». Et posons-nous la question: quelle chance y a-t-il de rencontrer un conscrit mesurant plus du double de la taille moyenne? Réponse: aucune, ou quasiment. C'est que, dans les distributions de Laplace-Gauss, toutes les valeurs possibles de la variable sont très concentrées autour de la moyenne, et sont par suite toutes du même ordre de grandeur; les grandes valeurs ont une probabilité quasi nulle.

Considérons maintenant, comme V. Pareto l'a fait, la distribution des revenus; et posons-nous la même question: quelle chance y a-t-il d'observer des revenus supérieurs au double du revenu moyen? Réponse: pour les revenus fiscaux en France et actuellement, de l'ordre de 6 à 7 %. Ce n'est pas négligeable. Ici, les grandes valeurs ne sont pas rares; il s'agit d'un tout autre ordre de phénomènes.

Pareto recherche donc, pour de *petites* statistiques disponibles de revenus, à plusieurs époques et en plusieurs pays, quelle serait la forme analytique d'une distribution théorique s'ajustant bien sur les observations et ayant la propriété voulue que les grandes valeurs aient une fréquence non négligeable. Lui sait donc ce qu'il cherche; il le fait graphiquement, d'abord, et non sans quelques tâtonnements, n'en doutons pas.

Mais que voici de la *bonne* « analyse de données»! Car de l'expression mathématique d'une distribution, on peut déduire algébriquement des propriétés dont la vérification permet de confirmer (ou éventuellement d'infirmer) la validité de cet ajustement (par exemple, le calcul montre que pour l'expression (1) ci-dessous, la fréquence des valeurs excédant le double de la moyenne est, pour les valeurs usuelles du paramètre α, bien de l'ordre de grandeur de 5 à 10% :' sur ce point, il y a confirmation) .

C'est en outre de la connaissance de la forme mathématique de la distribution théorique que peuvent éventuellement s'inférer des modèles explicatifs ; on en verra ci-dessous le principal exemple.

V. Pareto montre donc, empiriquement, que l'expression mathématique d'une distribution s'ajustant bien aux observations est de la forme:

(1) $\mathbf{P_r\,(X>x) = K/(\mathit{x}+\mathit{c})^{\alpha} \quad \alpha>0,\ K>0,\ x\geq x_{0\,>0}}$

avec des valeurs estimées de l'exposant a qui, à son époque, sont comprises entre 1 et 2 pour les revenus, comme d'ailleurs pour les patrimoines.

Il est clair qu'une fonction de forme (1) décroît, lorsque *x* augmente indéfiniment, beaucoup moins vite vers zéro, que dans le cas des distributions de Laplace-Gauss, dont la densité est de forme:

(2) λe^{-Kx2} **K> 0, λ > 0**

L'exponentielle d'un carré croît infiniment plus vite qu'une « fonction puissance» ; la distribution «normale» vaut quasiment 0 dès que *x* s'écarte suffisamment de la moyenne.

Des distributions du type parétien (1) furent par la suite retrouvées en lexicologie (on y parle de la loi « rang-fréquence» de Estoup et Zipf, mais c'est le *volapück* propre à la tribu des linguistes), en géographie urbaine (loi « rang-taille» des agglomérations rangées par population décroissante, dite de Auerbach, du nom du géographe allemand qui la retrouve vers 1910, en ignorant lui aussi qu'il s'agit d'une distribution parétienne : encore une autre appellation, propre, cette fois-ci, aux géographes).

On les retrouve aussi dans des phénomènes non sociaux, mais naturels, telle la distribution de la longueur des fleuves ou de la surface des lacs.

Et dans bien d'autres disciplines des Sciences de l'Homme ou des Sciences de la Nature. Bref, vers la fin des années 1920, on peut être persuadé qu'il s'agit d'une loi universelle, presque aussi universelle que la « loi normale ».

Et c'est là qu'intervient Paul Lévy. Ce théoricien du Calcul des probabilités ne s'intéresse guère aux applications; peut-être ignorait-il alors jusqu'au nom de V. Pareto. Par contre, il s'intéresse beaucoup à la question suivante, qui est interne au Calcul des probabilités : quelles sont toutes les distributions qui, *comme c'est le cas pour la loi de Laplace et Gauss,* sont telles que si l'on additionne plusieurs variables aléatoires indépendantes extraites de cette distribution, on retrouve (à un changement d'origine et à un changement d'unité près) la même loi?

De telles lois sont appelées par P. Lévy de *type stable par rapport à l'addition.*

Leur importance vient notamment de ce que nous pensons presque toujours, quand plusieurs variables sont en jeu, et en première approximation, à un modèle linéaire. Elle vient aussi de ce que seules elles peuvent être « lois limites» de moyennes (convenablement pondérées) de variables aléatoires indépendantes.

Or la réponse, démontrée en 1935 (Pareto est mort depuis douze ans) par Paul Lévy est la suivante :

- il y a d'une part la loi de Laplace-Gauss, quand les variables additionnées ont une variance finie, et sont donc toutes du même ordre de grandeur;
- et d'autre part, toute une famille de lois, qui sont asymptotiquement de la forme (1) de Pareto, le paramètre α pouvant être quelconque entre 0 et 2 :

$0< \alpha <2$

Pour cette seconde famille de lois stables, dont on voit pourquoi il convient, comme B. Mandelbrot l'a fait le premier, de les appeler de Pareto-Lévy, la variance est infinie; c'est cela qui explique que les grandes valeurs n'y soient pas rares.

Pour terminer sur ce point, j'ajouterai que l'homme de Pareto, que l'on peut dire *homme extrême,* celui où les grandes valeurs sont possibles, où la variabilité est le caractère dominant, me paraît bien plus adapté à la plupart des variables que l'on rencontre dans les Sciences de l'Homme, que l' *homme moyen* de Adolphe Quetelet, qui ne vaut que pour des variables très peu dispersées (telles les mesures anthropométriques, en effet). Mais l'influence de Quetelet fut grande, hélas, sur les Sciences sociales. Qu'on songe à cette absurdité: l'intelligence (le QI) étalonnée selon la distribution de LaplaceGauss autour d'une « moyenne» arbitrairement fixée à 100. Or quiconque a dû, dans sa vie, faire passer des épreuves scolaires sait bien que les bonnes performances, voire les très bonnes, comme d'ailleurs les mauvaises, si elles ne sont pas les plus fréquentes, ne sont pas non plus très rares. A supposer même que cela ait un sens de mesurer l'intelligence, quels gâchis ont sans doute résulté de cet étalonnage à la Quetelet !

Dans l'entre-deux-guerres, Stefan Zweig écrivit un essai resté célèbre:

Sternstunden der Menscheit. Littéralement, *Heures étoilées de l'humanité.* L'idée de S. Zweig, illustrée par douze exemples, est qu'il est des moments dans l'histoire de l'humanité où le destin, éclairé par une petite lueur qui s'allume, bascule vers de grands accomplissements.

Dans l'histoire de la pensée aussi, il est de ces *Sternstunden* (peut-on dire de ces grandes heures ?), où commence une prodigieuse aventure ; pour moi, l'été 1654, qui vit la naissance du Calcul des probabilités, et donc de tout ce qui s'ensuivit, est incontestablement l'un de ces moments phares.

Deux siècles plus tard, une autre aventure comrrience, un autre tournant est pris qui sera lui aussi à l'origine de développements capitaux dans l'histoire de la pensée, et plus particulièrement dans celle des mathématiques et de leurs applications.

En 1847, Georges Boole publie *The mathematical analysis* if *Logic*, puis en 1854 (exactement l'année bicentenaire du Calcul des probabilités), *An investigation of the laws of Thought.* Les lois de la Pensée! Ambitieux projet. Nous sommes bien loin, encore aujourd'hui, d'approcher de son aboutissement; et c'est tant mieux.

Non, plus modestement, ce que crée en ce milieu de siècle G. Boole, c'est le traitement algébrique des règles appliquées dans le raisonnement mathématique: les *algèbres booléennes* (synonyme: *treillis booléens)* sont nées, et c'est déjà considérable.

Là aussi, il y a une préhistoire : Leibniz, sans doute, voire Ramon Lull ; certains iront chercher les prémisses de cette aventure dans la philosophie médiévale, et jusque chez Aristote. Pourquoi pas?

Il y a en tout cas un contexte favorable, celui de l'école algébrique anglaise du XIX^{e} siècle, qui est celle de l'algèbre symbolique. Mais c'est bien à Boole qu'appartient cette idée géniale: modéliser, au moyen d'une structure algébrique définie par quelques axiomes simples, un secteur bien délimité de la pensée et du langage (celui, répétons-le, du raisonnement mathématique et de son discours).

Recherche de lois de la pensée, de lois du langage, qu'y a-t-il de plus « humain» que cela? Si nous ne sommes pas ici dans les « sciences humaines », où le serons-nous? D'ailleurs, G. Boole s'intéressa aussi au raisonnement « probabiliste », et laissa à la postérité quelques règles, dérivées du Calcul booléen, pour le Calcul des probabilités « totales et composées ».

Quelle fut pour les mathématiques la suite du pas franchi par G. Boole?

D'abord la logique mathématique elle-même: *les logiques,* plus exactement, qui, depuis un siècle et demi, se sont efforcées de « coller» de plus près aux nuances du raisonnement, et à ses fondements. Pour n'en citer que quelques unes, logique intuitionniste, logiques modales, logiques combinatoires, etc. Toutes sont des chapitres des mathématiques, avec leur combinatoire et leurs règles de calcul propres. Et cette arborescence, qui a sa racine dans la création de Boole, n'a pas fini de proliférer.

Parallèlement, il y a tout l'effort déployé pour remplacer par des machines l'activité de l'homme calculant (Charles Babbage réalise ses premiers prototypes, en Angleterre toujours, vers 1830-1840), et plus généralement de l'homme effectuant certaines activités intellectuelles éventuellement mécanisables.

C'est *l'Informatique théorique,* avec (chez quelques psychologues notamment), l'espoir un peu fou que l'ordinateur puisse fournir un « modèle» acceptable du cerveau humain; je crois qu'il n'en est rien, et c'est fort heureux ; les tâches accomplies par ces machines ne recouvrent que quelques secteurs, très limités, de l'activité intellectuelle, ceux pour lesquels elles sont *programmées.*

Mais ces programmes, justement, il faut les écrire; on le fait dans des langages artificiels, créés en vue de tel ou tel ensemble de tâches dont ils pourront commander la mise en œuvre. D'où la théorie mathématique des *langages formels,* outils algébriques de base pour l'informatique théorique, qui relèvent pour l'essentiel de la théorie des monoïdes et de quelques autres structures algébriques pauvres (cf [11]).

Ici encore, certains linguistes avaient cru, il y a quatre décennies, que l'on était proche d'algébriser non seulement les langages artificiels de l'informatique, mais également les langages naturels. Espoir évidemment déçu (et, encore une fois, tant mieux !) : pour parler à la machine qui, si elle a une mémoire, n'a pas de conscience, le langage n'a besoin que d'une syntaxe; pour la machine, le sens des « mots» qui sont inscrits dans sa mémoire n'a aucune importance, seuls comptent leurs enchaînements, et les règles qui s'y appliquent. Et c'est cela seul qui est algébrisable.

Pour les langages naturels, il en va tout autrement: la sémantique est inséparable de leur fonctionnement.

Il n'en reste pas moins que c'est l'ambition d'automatiser des secteurs de plus en plus larges de l'activité intellectuelle de l'homme, avec ses logiques et ses langages, qui a été, au cours du siècle qui s'achève, le principal moteur dans l'élaboration de ces quelques chapitres nouveaux des mathématiques que l'on peut situer dans la filiation de la théorie booléenne.

Il est d'ailleurs un autre domaine des Mathématiques qui est dans cette filiation, et qui est lui aussi en rapport avec certains faits de la langue.

C'est celui de la théorie des ensembles ordonnés et d'abord, au sein de celle-ci, des *algèbres de treillis,* qui généralisent les algèbres de Boole.

Les faits de langue que formalise la théorie des ensembles ordonnés, ce sont ceux du fonctionnement syntaxique des verbes comparatifs, de la catégorie grammaticale du comparatif . Pas tous les comparatifs ; seulement ceux où la transitivité (si Pierre est plus grand que Paul, et Paul plus grand que Jacques, alors Pierre est plus grand que Jacques) est respectée. Des affaiblissements de cette condition (semi-ordres, quasi-ordres, ordres sesquitransitifs, etc.) font d'ailleurs aussi l'objet de travaux mathématiques encore actuels ; on n'en parlera pas ici.

Pour s'en tenir au seul cas des comparatifs transitifs, une première dichotomie se présente: la relation d'ordre qui en résulte, lorsqu'on l'applique à un ensemble pour lequel elle est pertinente (l'ensemble dont les éléments peuvent être sujet ou complément d'objet direct du verbe comparatif) est-elle totale ou partielle?

On est dans le premier cas si l'on peut toujours dire, de deux éléments de cet ensemble, lequel vient avant l'autre, ou éventuellement lui est *ex aequo;* c'est par exemple le cas, déjà évoqué, des conscrits comparés selon leur taille.

Mais on peut aussi être dans le second cas.

Un exemple classique, et familier, est celui où deux professeurs, mettons que ce soit celui de français et celui de mathématiques, ont à ranger les élèves d'une classe par ordre de mérite.

Tant que nos deux professeurs sont du même avis, il n'y a pas de problème, et l'ordre de classement est bien transitif; mais s'il y a désaccord, la comparaison n'est plus *a priori* possible aussi longtemps que l'on voudra l'unanimité du jury pour décider de la place d'un élève par rapport à un autre : l'ordre est *partiel.*

Supposons, en outre, que chaque professeur mette une note aux élèves.

Alors, s'ils sont en désaccord sur l'ordre dans lequel ranger les élèves Dupont et Durand, ils peuvent se mettre d'accord sur une chose : c'est l'ensemble des couples de notes qui seraient meilleures à la fois que celle de Durand et que celle de Dupont (leurs majorants communs, en termes techniques). Et parmi ceux-ci, le plus petit, donc le plus proche en un sens de ce sur quoi porte le désaccord, c'est le couple correspondant à la meilleure des deux notes dans chacune des deux matières: le plus *petit majorant commun* (synonyme: le *supremum)* de Durand et Dupont.

En dualité, la considération des minorants communs conduit au plus grand de ceux-ci, *l'infimum.*

Dans cet ordre partiel, chaque couple d'éléments non comparables admet donc un minimum des majorants communs, son supremum, et un maximum des minorants communs, son infinum ; tout ensemble ordonné ayant cette propriété est ce qu'on appelle un *treillis.* Le supremum et l'infinum d'un nombre fini quelconque d'éléments se définissent de la même façon.

Dans le cas particulier des algèbres de Boole, le supremum est le « ou » (non exclusif) de la logique classique, et l'infimum le « et ».

Lorsque des éléments sont comparables, leur supremum est évidemment le plus grand d'entre eux, leur *maximum,* et leur infimum est leur *minimum.*

Ainsi, supremum et infimum généralisent les notions de maximum et minimum, c'est-à-dire celles par lesquelles s'exprime le *superlatif absolu* (le plus grand de tous ceux qui ... , le maximum) qui va, dans la plupart des langues naturelles, avec le comparatif, et complète celui-ci.

Par contre, le supremum, qui est un superlatif (le minimum ...) de comparatif (... des majorants) est un concept nécessaire pour les mathématiques des ensembles ordonnés, mais dont je crois qu'il n' est attesté dans aucune langue naturelle. Je me trompe peut-être.

Nous retrouverons plus loin la nécessité de l'introduire aussi dans le cas des ensembles totalement ordonnés.

Pour en finir avec cette brève évocation des treillis, quelques remarques doivent être faites.

- Tous les ensembles partiellement ordonnés ne sont pas des treillis; le privilège de ceux-ci vient de ce que comme deux opérations binaires y sont définies et ont quelques bonnes propriétés, ils peuvent être étudiés au moyen de calculs algébriques, et non par des seules méthodes qui n'ont rien de systématique ni d'aisément automatisable, celles de la théorie des graphes par exemple. Bien entendu, il y a toute une typologie des treillis, qui se subdivisent en quelques grandes catégories.

- La théorie des treillis fournit le cadre naturel pour la modélisation mathématique de problèmes de décisions collectives et de choix à critères multiples. On comprend bien pourquoi: dans les décisions que doit prendre, par exemple, un jury de concours (on y a fait allusion plus haut), supremum et infimum délimitent exactement les bornes de ce sur quoi il y a consensus unanime. Entre ces deux limites, le jury devra discuter ou appliquer des procédures permettant de dégager un accord. La définition et la logique de telles procédures constituent tout un chapitre, inauguré par Condorcet (cf. [13 et [21]), de la praxéologie mathématique.

- Si la théorie des treillis est utile pour les Sciences sociales (et pas seulement en praxéologie), c'est du développement interne des mathématiques qu'elle est née. Assez récemment d'ailleurs. Le premier livre qui lui est entièrement consacré paraît en 1940 aux États-Unis (G. D. Birkhoff, *Lattice Theory,* AMS).

Sur les treillis et sur la question qui va suivre, on peut, en français consulter [2] de la bibliographie.

Supremum et infimum constituent, on vient de le voir, une catégorie grammaticale nouvelle: des superlatifs de comparatifs. Nous venons d'en parler à propos des treillis, dont la notion a bien été dégagée dans les années 1930 seulement.

C'est en fait beaucoup plus tôt, dès les années 1870-1880, et à propos non de l'ordre partiel mais de *l'ordre total,* que les travaux de Richard Dedekind pour donner une définition rigoureuse des nombres réels, et ceux de Georg Cantor pour élaborer une typologie des ordres totaux introduisent cette notion de plus petit des majorants (d'une partie d'un ensemble ordonné).

Bien entendu, lorsque l'ordre est total, deux éléments quelconques y sont toujours comparables, et leur supremum est, on l'a vu, leur maximum, le plus grand des deux. De même, une partie constituée de 15 ou de 10^{27} éléments d'un ordre total a un maximum et un minimum. C'est évidemment lorsque l'on aura à considérer des parties *infinies* -d'une *échelle* (le mot « échelle» est utilisé ici comme synonyme d'ordre total) que les difficultés commencent.

Esquissons une typologie, du point de vue de leurs propriétés ordinales, des principales échelles de comparaison ou de mesure.

Il y a d'abord les échelles *finies,* celles qui n'ont qu'un nombre fini d'échelons (ou de degrés) ; toutes les échelles de mesure matérialisées ne peuvent avoir qu'un nombre fini de graduations, et sont donc finies.

Finies, mais arbitrairement grandes; il est donc absolument nécessaire de disposer d'une échelle dans laquelle pourront s'inscrire toutes les échelles finies quel que soit leur nombre d'éléments: c'est l'échelle *infinie* des nombres entiers naturels (positifs), ou celle des nombres entiers positifs ou négatifs, notées respectivement ω et ζ (dzéta, initiale de Zahl, « nombre» en allemand) par G. Cantor; il y a en outre la duale ω^* de ω obtenue en renversant l'ordre de cette dernière.

Ces échelles ont un nombre infini d'éléments: elles ne sont donc pas matérialisables, et n'existent que dans le langage, par les mots et les notations qui désignent leurs degrés, et permettent de les engendrér tous.

On les qualifie de *discrètes;* ce terme mathématique signifie qu'elles ont la propriété qu'entre deux degrés de l'échelle il n'y a qu'un nombre fini d'intermédiaires: leur construction est destinée précisément à fournir un vocabulaire ayant cette propriété.

Mais on remarquera que, si les échelles (ω et ζ permettent de désigner des éléments toujours plus grands, et si grands soient-ils (c'est ce qu'on appelait autrefois le superlatif relatif), elles n'ont pas de maxinum, ni même (pour ζ) de minimum; il n'y a plus de superlatif absolu - de plus grand élément pour toute partie infinie de ces échelles.

Et G. Cantor de démontrer que si une échelle est telle que chacune de ses parties a un maximum et un minimum, alors cette échelle est *nécessairement finie.*

Ainsi, entre les deux superlatifs, l'absolu et le relatif, il faut choisir: ou nous avons un langage qui permet de toujours nommer le premier, mais alors nous perdons le second; et inversement. Il y a antinomie entre ces deux superlatifs.

Y-a-t-il eu un seul grammairien pour relever ce fait? J'en doute fort. Et pourtant, il s'agit là d'une « loi» inéluctable dans le fonctionnement du langage.

Les échelles discrètes sont pleines de trous : entre deux échelons consécutifs il n'y a par définition aucun autre élément.

Or, dans notre représentation d'autres échelles de comparaison ou de mesure, telles que celle de la hauteur des sons pour certains instruments de musique (par exemple, le *glissando* de quelques instruments à vent) ou plus prosaïquement celle des points d'une droite orientée, il n'y a pas de trous: entre deux éléments quelconques, on peut toujours intercaler au moins un intermédiaire (et par suite une infinité).

De telles échelles ont été dites *denses (dicht)* par G. Cantor.

Sont par exemple denses l'échelle des nombres *rationnels* (les fractions irréductibles), ou celle des nombres *décimaux* (ceux qui n'ont qu'un nombre fini de décimales après la virgule). Dans ces deux exemples, ces échelles denses sont aussi *dénombrables:* chaque élément peut en être désigné par un « mot» de longueur finie, écrit au moyen d'un « alphabet» (les signes avec lesquels on les écrit) également fini.

Par exemple, pour l'échelle des rationnels, en écriture décimale, l'alphabet est constitué de douze signes : les dix chiffres de 0 à 9, la barre de fraction, le signe « moins» pour les négatifs.

Ainsi, dénombrable, c'est *dénommable.* Prenons-y bien garde, il y a là une limite absolue à tous les langages, qu'ils soient artificiels ou naturels: quoique nous fassions, nous ne pourrons jamais écrire, ou dire, que des suites *finies* de signes, et ceux-ci sont toujours en nombre fini: les phonèmes d'une langue sont en nombre fini (ils dépassent rarement quelques dizaines), de même que les touches du clavier d'un ordinateur - lequel n'est jamais, in *fine,* qu'une machine à écrire.

Les échelles denses et dénombrables n'ont pas de « trou »;et cependant, elles sont pleines de « lacunes».

Considérons en effet, à titre d'exemple, l'échelle des nombres rationnels.

Comme on le sait depuis l'Antiquité, aucun rationnel n'a pour carré le nombre 2. D'ailleurs, la partie X constituée des rationnels de carré inférieur à 2 n'a pas de maximum; de même, l'ensemble des rationnels de carré supérieur à 2 n'a pas de minimum.

La racine carrée de 2 n'est pas repérable sur cette échelle : il y a une lacune.

Par contre, sur l'échelle des points d'une droite orientée (et munie d'une origine et d'une unité), telle qu'on se la représente en géométrie euclidienne, rien n'est plus facile que de construire (avec la règle et le compas !) le point d'abscisse $\sqrt{2}$.

Si donc nous voulons définir avec précision l'échelle des points de la droite euclidienne, il faut ajouter quelque chose à la propriété de densité. Et il ne suffit pas d'adjoindre à l' « alphabet » quelques nouveaux signes, tel $\sqrt{}$; car, cela se démontre, cette échelle n'est pas dénombrable.

La propriété supplémentaire, qui va assurer la *continuité (Stetigkeit)* de l'échelle, il y a plusieurs façons équivalentes de la formuler (c'est ce qu'ont fait et Cantor et Dedekind) ; toutes reviennent à celle-ci: l'échelle sera dite continue si d'une part elle contient une *partie dénombrable* qui est *dense* sur elle (entre deux points quelconques de la droite, ou peut toujours intercaler des points d'abscisse rationelle ou décimale), et si d'autre part toute partie X *majorée* (telle que l'est, dans l'exemple ci-dessus, l'ensemble des rationnels de carré inférieur à 2) admet un *plus petit de ses majorants* un minimum de ses majorants, en un mot un *supremum.* Dans l'exemple, $\sqrt{2}$ est par définition ce supremum.

La seconde de ces conditions montre donc bien que la notion de supremum qui, rappelons-le, ne semble pas exister dans les langues naturelles, est indispensable pour traiter correctement d'une chose apparemment aussi simple et familière que la droite de la géométrie euclidienne.

Quant à la première, elle signifie que si des points (il s'agit même, en fait, de la plupart des points) de cette droite ne peuvent être dénommés (il y faudrait des « mots» de longueur infinie; en écriture décimale, une infinité de chiffres après la virgule; un tel « mot », par définition, jamais ne sera écrit), ils peuvent par contre toujours l'être *approximativement.* Tout intervalle de la droite pourra être subdivisé, avec des points de subdivision en nombre fini et d'abscisse décimale, et ceci à tel degré d'approximation (nombre de décilnales) que l'on voudra: cet intervalle, qui est infini non dénombrable, est *approximativement fini.* Ce qui nous ramène à notre point de départ (les échelles finies), tout en nous faisant aborder à la topologie qui rassemble les théories mathématiques permettant de « traiter avec précision l'à-peu-près ».

Tout langage naturel est nécessairement dénombrable, n'est que dénombrable au plus. Donc nécessairement approximatif.

Ceci est une évidence. L'intérêt que devrait avoir pour la linguistique la typologie des échelles, c'est de bien mettre en lumière sur cet exemple du fonctionnement du comparatif et du superlatif des limites, des seuils infranchissables (et « incontournables », c'est le cas où jamais d'utiliser ce néologisme) dans le fonctionnement du langage en général: le fini, l'infini dénombrable, l'approximativement fini. Pour ce dernier, une catégorie grammaticale nouvelle est nécessaire, celle du supremum. Et pourtant, il ne s'agit que de représenter cette idée si élémentaire à première vue, si rudimentaire; ranger par taille croissante, mettre en «rangs d'oignons », une quelconque série d'objets.

Ceci montre bien qu'on n'est pas à la veille de la mathématisation de l'ensemble des faits de langue.

Les Sciences humaines sont, on l'a souvent dit à juste titre, trop complexes pour pouvoir être mathématisées au même degré que les Sciences physiques, en raison de l'état actuel de nos connaissances (de notre peu de connaissances) en Linguistique ou en Sociologie par exemple. En raison aussi de l'état actuel des Mathématiques qui pourtant élaborent des outils de plus en plus diversifiés et performants, tant pour elles-mêmes que par les « retombées)} qui en résultent pour les autres sciences.

Dans ce rapide survol, trop elliptique peut-être et sûrement incomplet, j'ai essayé de rappeler qu'à condition de ne s'attaquer qu'à un phénomène assez bien spécifié et délimité, et de trouver la bonne formulation, la mathématisation est parfois possible; et qu'en ce cas elle est fructueuse en général.

Fructueuse pour la compréhension du domaine d'application, bien sûr; mais fructueuse aussi, éventuellement, pour la création mathématique elle-même.

J'ai insisté sur les deux grands exemples qui ont émergé au cours des trois à quatre derniers siècles. Mais cette aventure des rapports pluriséculaires entre Mathématiques et Sciences humaines est loin d'être achevée. Je tiens même pour assuré qu'elle a, sur le long terme, un bel avenir devant elle: les hommes tendront toujours vers plus de compréhension et donc vers plus de structuration du monde, qu'il soit physique ou social, dans lequel ils sont immergés. Et cette structuration, c'est dans le langage mathématique qu'elle finit toujours par s'exprimer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barbut, M., *Mathématiques des sciences humaines, Paris , PUF, t. 1 : Combinatoire et algèbre, 1967 t.2 : Nombres et mesures, 1968*
[2] Barbut, M. et Monjardet, B., *Ordre et classification, Paris, Hachette, 1970*
[3] Barbut, M., En marge d’une lecture de Machiavel . « L’art de la guerre » et la praxéologie mathématique , *Annales ESC*, Paris, vol. 25, n°3, 1970, 567-573
[4] Bonneuil, N., Contextual and structural factors in fertility behaviour, *Population (English version), Selected Papers, 1990, 69 - 92*
[5] Boudon, R., Les mathématiques en sociologie, Paris, PUF, 1971
[6] Chazel, F., Boudon, R. et Lazarsfeld, P. (ed), *L’analyse des processus sociaux*, Paris-La Haye, Mouton, 1970
[7] Coumet, E., La théorie du hasard est-elle née par hasard ?, *Annales ESC*, Paris, vol. 25, n° 3, 1970, 574-598.
[8] Darmois, G., *Les mathématiques de la psychologie, Mémorial des sciences mathématiques,* Paris, Gauthier-Villars, n° 98, 1940.
[9] Degenne, A. et Forsé, A., *Les réseaux sociaux,* Paris, Armand Colin, 1994.
[10] Flament, c., *Théorie des graphes et structures sociales,* Paris-La Haye, MoutonGauthier-Villars, 1965.
[11] Gross, M. et Lentin, A., *Notions sur les grammaires formelles,* Paris, GauthierVillars, 1967.
[12] Guilbaud, G. Th., Faut-il jouer au plus fin ?, *La décision,* ouvrage collectif, Paris, Éditions du CNRS, 1961, 171-186.
[13] Guilbaud, G. Th., *Éléments de la théorie mathématique des jeux,* Paris, Dunod, 1968.
[14] Lévi-Strauss, c., *Les structures élémentaires de la parenté,* Paris, PUF, 1949.
[15] Lévy, P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires,* Paris, Gauthier-Villars, 1937. [16] Neumann,]. von et Morgenstern, O., *Theory of garnes and economic behavior,* Princeton (États-Unis), Princeton University Press, 1944.
[17] Pareto, V., *Écrits sur la courbe de répartition de la richesse,* réunis et commentés par G. Busino, Genève, Librairie Droz, 1965.
[18] Parlebas, P., *Élérnents de sociologie du sport,* Paris, PUF, 1986.
[19] Petruscewycz, M., A. A. Markov, ses probabilités en chaîne et les statistiques linguistiques, *Mathématiques et Sciences humaines,* n° 66, Paris, EHESS, 1979,5-42. [20] Rouanet, H., *Les modèles stochastiques de l'apprentissage,* Paris-La Haye, Mouton-Gauthier Villars, 1967.
[21] Saint-Sernin, *B., Les mathématiques de la décision,* Paris, PUF, 1973.