

# La théorie mathématique de la viabilité au service de la gestion durable

Une vision différente de l'économie

Isabelle Alvarez

INRAE – MIA -Paris Saclay  
ISC-PIF

# Petit rappel historique

Aubin J.-P, *Viability Theory*, Birkhauser, 1991

Aubin J.-P, Bayen A., Saint-Pierre P. *Viability Theory, new directions*, 2011

- Nombreux développements en mathématiques appliquées :  
théorie du contrôle, correspondances, jeux dynamiques, systèmes continus, discrets, NL, stochastiques, ...
- Nombreuses communautés de modélisateurs :  
climat, finance, robotique, élevage, dynamique des populations, tourisme, environnement, gestion des ressources renouvelables (forêt, pêche, eau, etc.)
- Nombreuses applications, en particulier dans le domaine de la gestion des ressources renouvelables : plus de 80 exemples dans la revue de Oubraham, A. and Zaccour, G. (2018).

Oubraham, A. and Zaccour, G. (2018) A Survey of Applications of Viability Theory to the Sustainable Exploitation of Renewable Resources. *Ecological Economics*, 145:346–367

# Plan

- **Comprendre la viabilité à partir d'un exemple : l'eutrophisation des lacs**
- Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité
- Le point de vue de la viabilité vs. l'optimisation directe
  - l'exploitation forestière
- La gestion des incertitudes pour la viabilité individuelle et collective
- Liens avec les concepts associés à la durabilité
- Conclusion

# L'eutrophisation des lacs

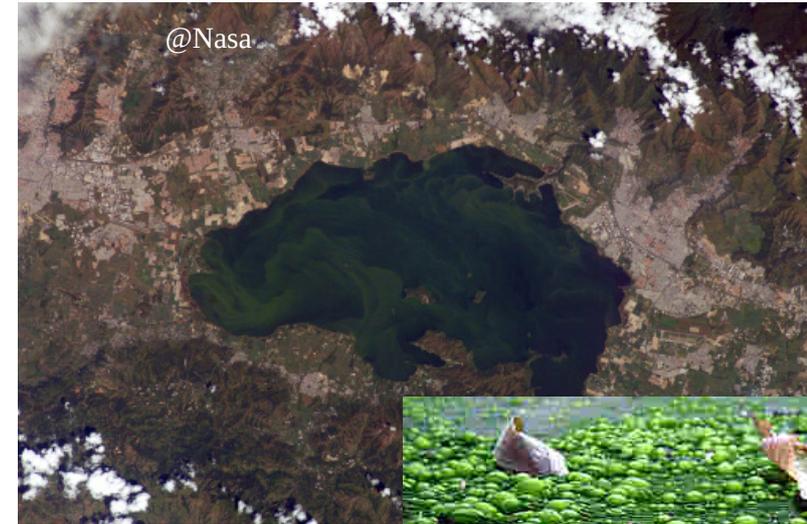
Accumulation de nutriments dans les lacs : phosphore (et azote)



@ S. Martin

Lac oligotrophe :

- Eau claire et saine
- Biodiversité élevée



Lac eutrophe :

- Eau turbide
- Eau putride et toxique (bloom bactérien)
- Diminution de l'oxygène dissout
- Perte de biodiversité (étouffement d'espèce, développement d'algues )

# Dynamique du Phosphore dans les lacs

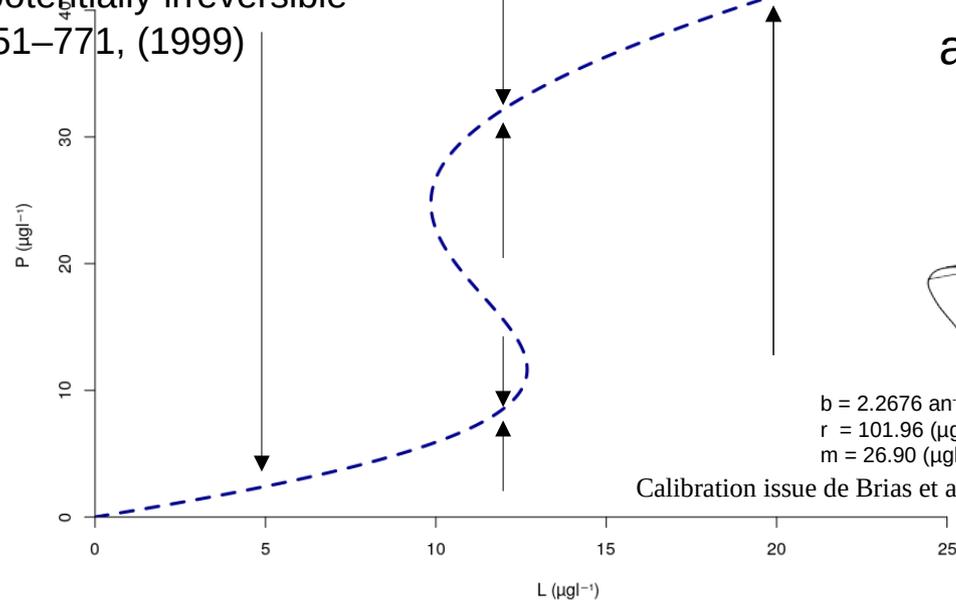
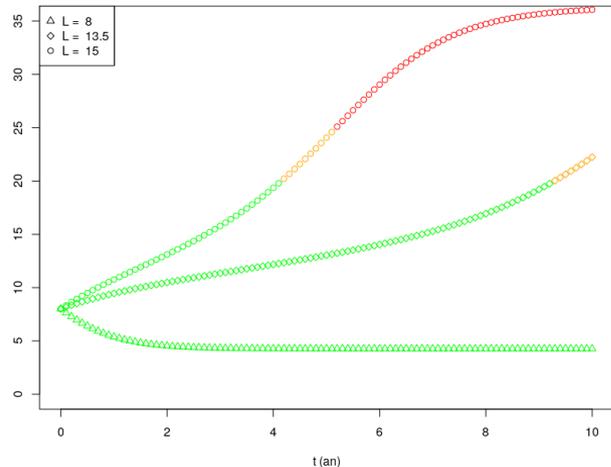
Nombreux travaux de l'OCDE : recueil de données, analyses, indicateurs

Vollenweider et al (1982). Eutrophication of waters. Monitoring, assessment and control. Technical report, OECD

Nombreux travaux de modélisation

S. R. Carpenter, D. Ludwig, and W. A. Brock, 'Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change', *Ecological Applications*, 9, 751–771, (1999)

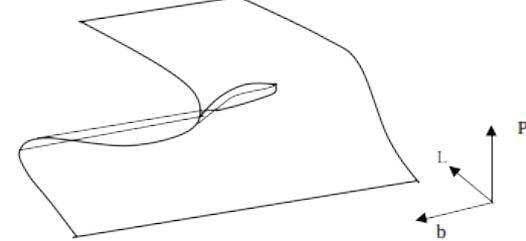
$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\text{perte}}{b.P(t)} + \underset{\text{apports extérieurs}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \underset{\text{recyclage depuis les alluvions}}{}$$



$b = 2.2676 \text{ an}^{-1}$   
 $r = 101.96 (\mu\text{g l}^{-1}).\text{an}^{-1}$   
 $m = 26.90 (\mu\text{g l}^{-1}).\text{an}^{-1}$

Calibration issue de Brias et al, 2018

$P(t)$  converge vers un attracteur qui se trouve sur une fronce



# Dynamique du Phosphore dans les lacs

Nombreux travaux de l'OCDE : recueil de données, analyses, indicateurs

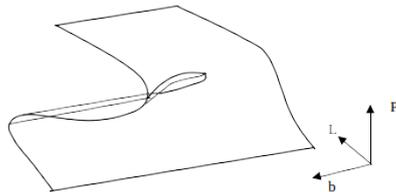
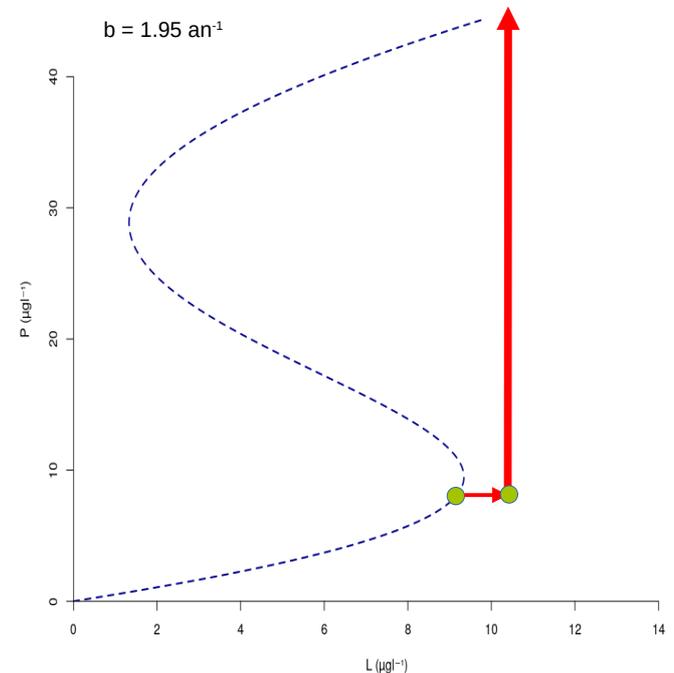
Vollenweider et al (1982). Eutrophication of waters. Monitoring, assessment and control. Technical report, OECD

Nombreux travaux de modélisation

S. R. Carpenter, D. Ludwig, and W. A. Brock, 'Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change', *Ecological Applications*, 9, 751–771, (1999)

Cela entraîne des comportements d'hystérésis

$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\substack{\text{perte} \\ \text{apports extérieurs}}}{b.P(t)} + \underset{\substack{\text{recyclage depuis les} \\ \text{alluvions}}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$



# Dynamique du Phosphore dans les lacs

Nombreux travaux de l'OCDE : recueil de données, analyses, indicateurs

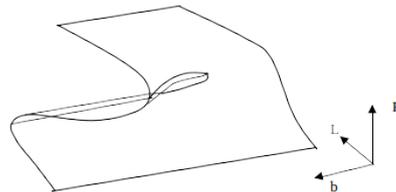
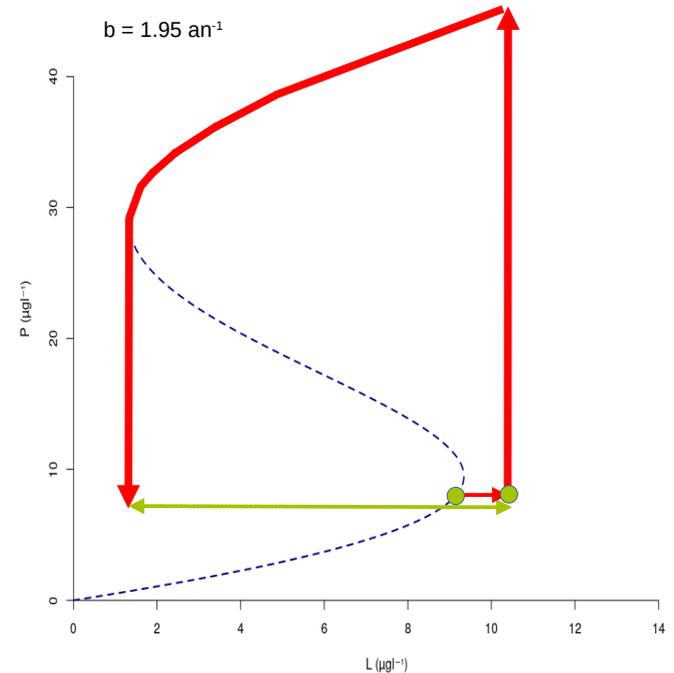
Vollenweider et al (1982). Eutrophication of waters. Monitoring, assessment and control. Technical report, OECD

Nombreux travaux de modélisation

S. R. Carpenter, D. Ludwig, and W. A. Brock, 'Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change', *Ecological Applications*, 9, 751–771, (1999)

Cela entraîne des comportements d'hystérésis

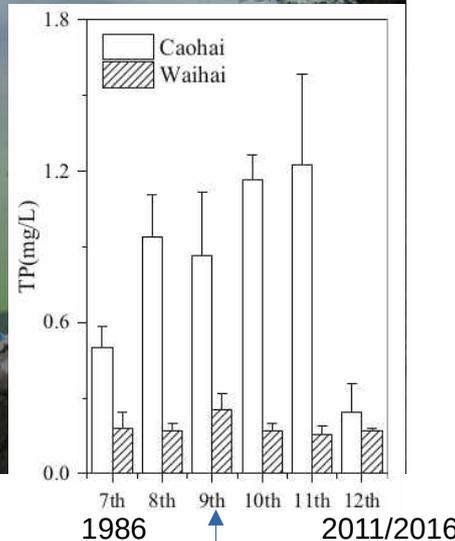
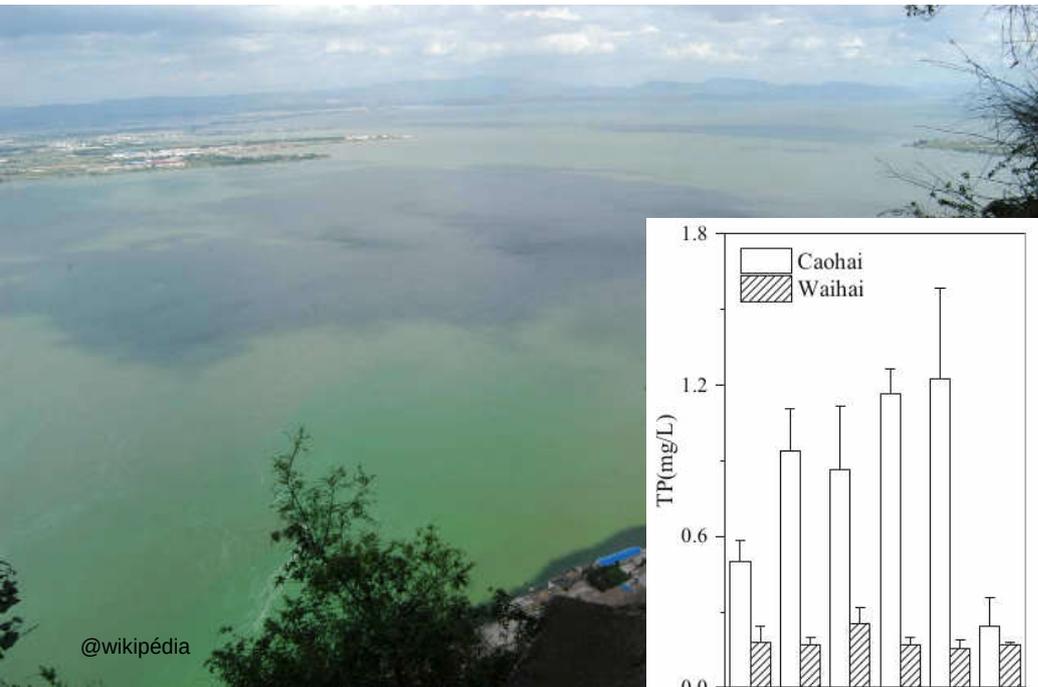
$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\text{perte}}{b.P(t)} + \underset{\text{apports extérieurs}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \quad \text{recyclage depuis les alluvions}$$





## Water pollution characteristics of Dianchi Lake and the course of protection and pollution management

Wenbin Liu · Shengrui Wang · Li Zhang ·  
Zhaokui Ni



# Restauration: moyens d'action

Suppression des sources de pollutions ponctuelles

- Épuration des eaux usées de Kunming
- Fermeture des mines de potasse et des activités industrielles polluantes
- Relocalisation des industries agroalimentaires 5,2 millions de volailles déplacées, interdiction de l'aquaculture

Suppression des sources de pollutions diffuses

- Restriction d'utilisation des engrais
- Interdiction des cultures florales et maraîchères sur un large périmètre et en ville

Dragage (4,3 millions de m<sup>3</sup> de sédiments)

Apport d'eau saine (détournement de rivières)

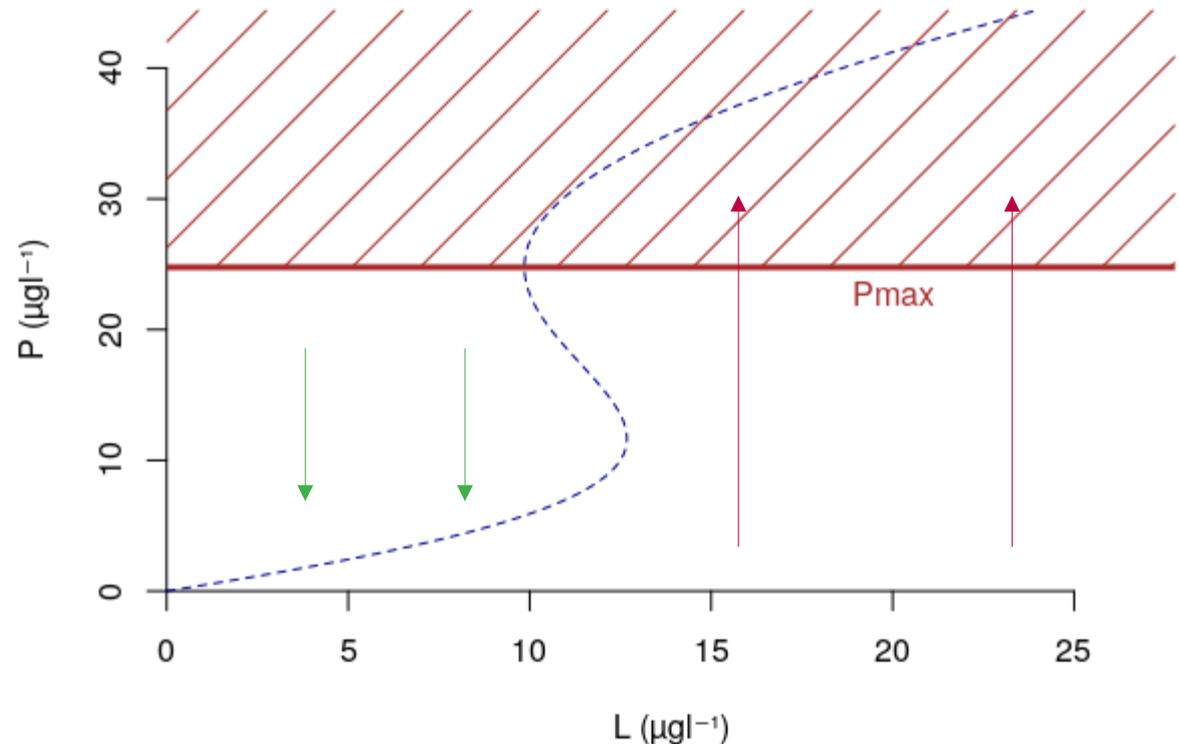
# Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

Définir l'ensemble des états souhaitables

- Valeur maximum pour la concentration de Phosphore Total



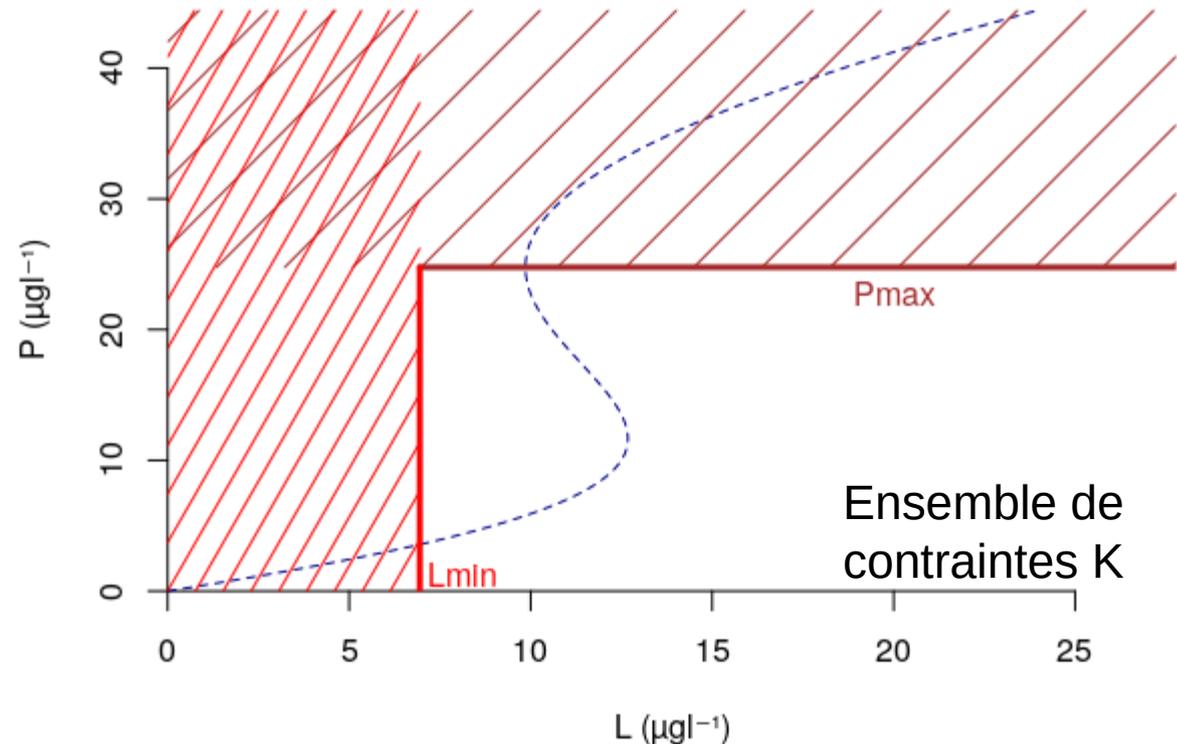
# Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

Définir l'ensemble des états souhaitables

- Valeur maximum pour la concentration de Phosphore Total
- Valeur minimum d'apports de Phosphore pour l'activité agricole



# Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

Poser le problème :

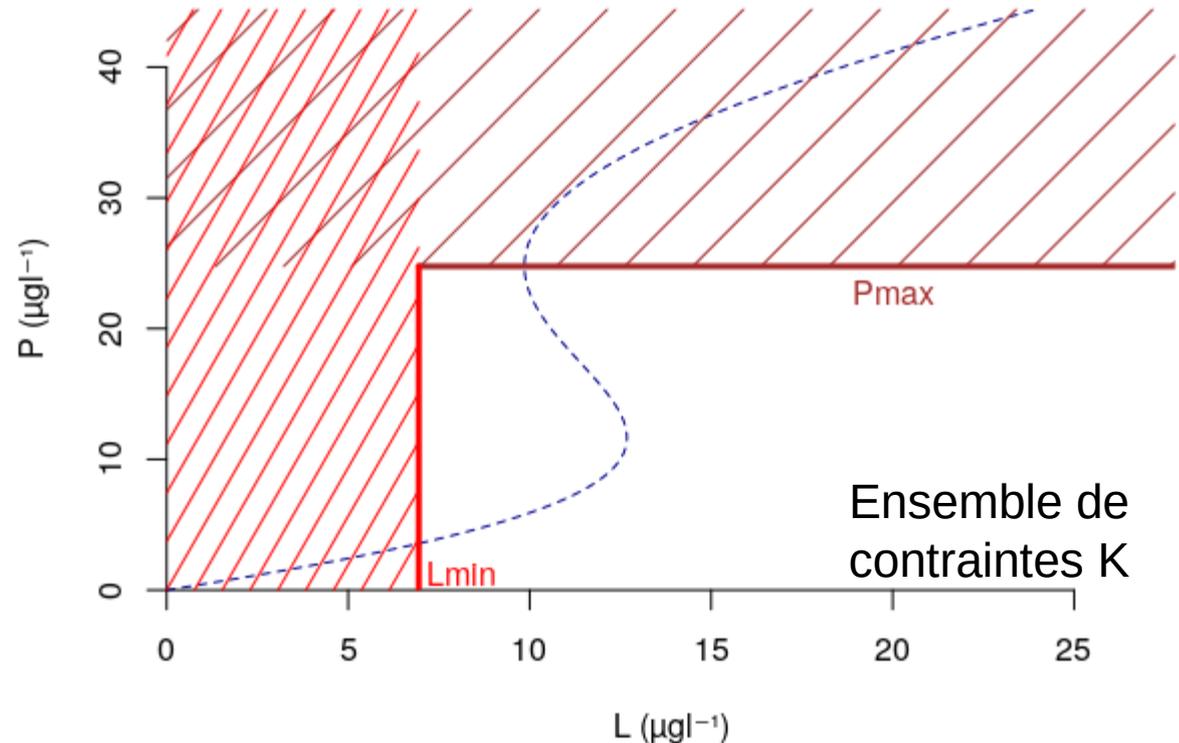
- Définir l'ensemble des états souhaitables
- Définir les moyens d'action admissibles
- Connaître la dynamique

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$u(t)$  dans  $[u_{\min}, u_{\max}]$

$(L, P)$  dans  $K$



# Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

Poser le problème

Calculer le noyau de viabilité

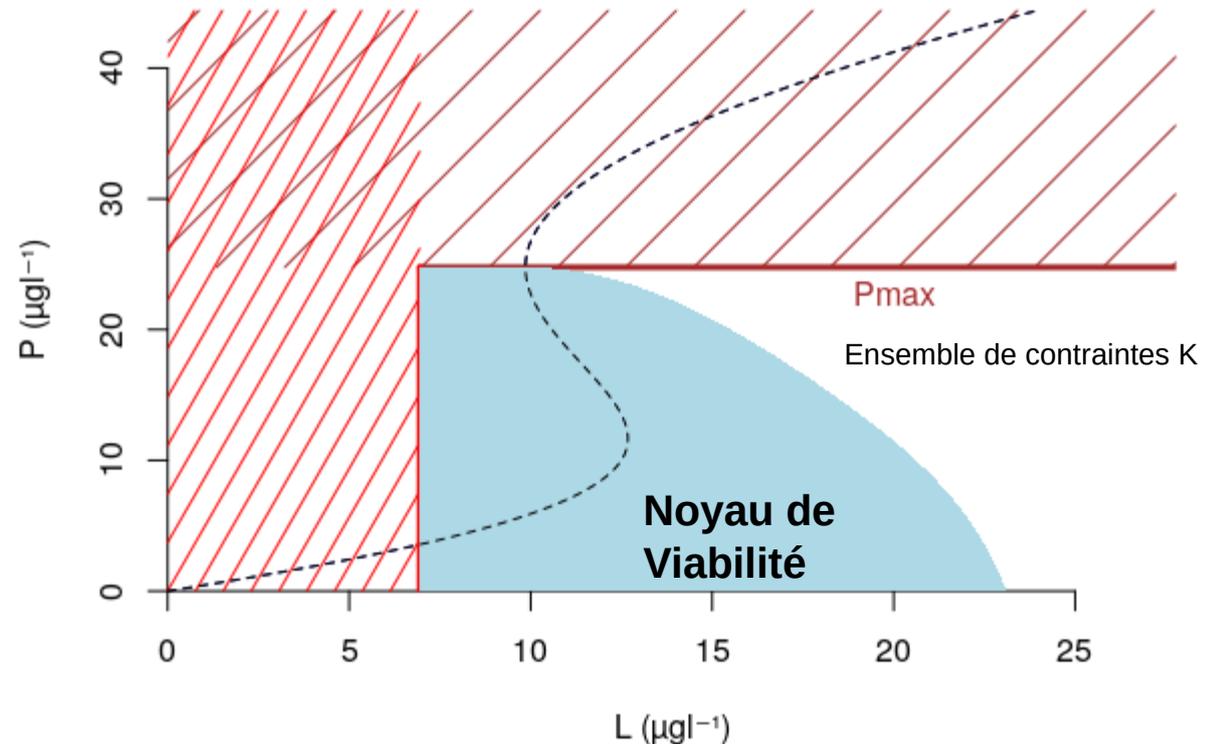
- Définir l'ensemble des états souhaitables
- Définir les moyens d'action admissibles
- Connaître la dynamique

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$u(t)$  dans  $[u_{\min}, u_{\max}]$

$(L, P)$  dans  $K$



# Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

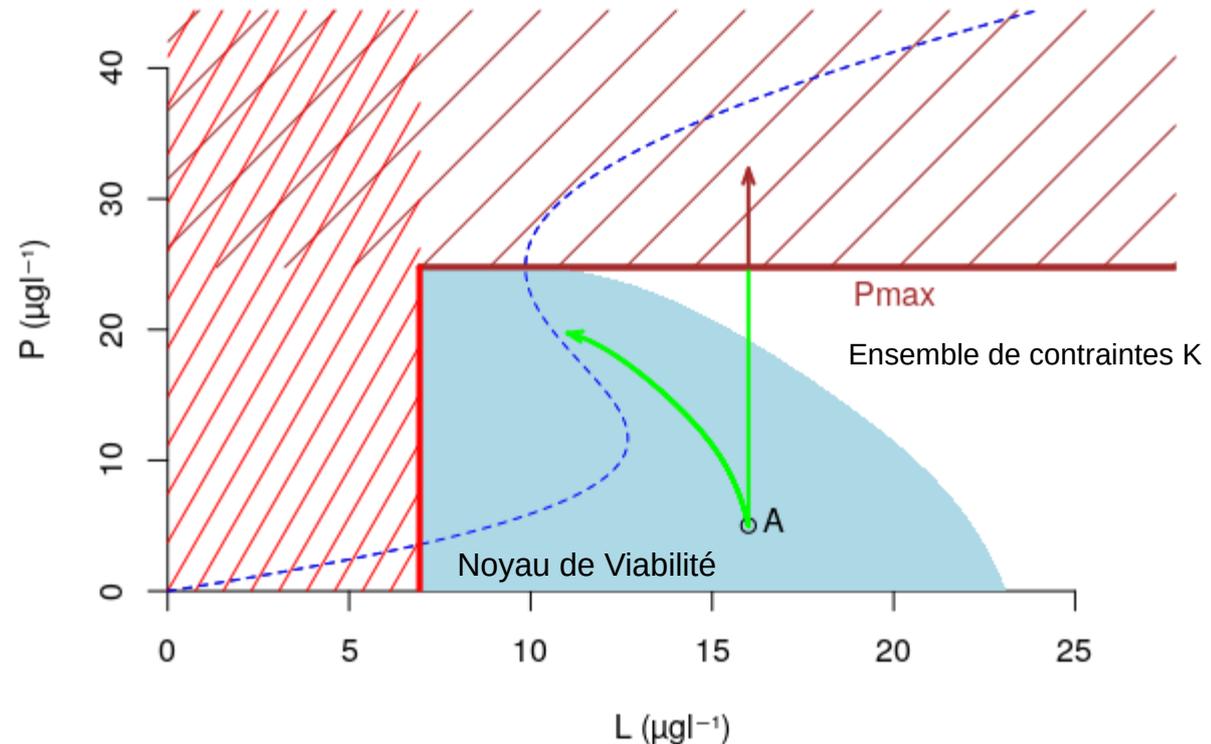
- Définir l'ensemble des états souhaitables
- Définir les moyens d'action admissibles
- Connaître la dynamique

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$u(t)$  dans  $[u_{\min}, u_{\max}]$

$(L, P)$  dans  $K$



# Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

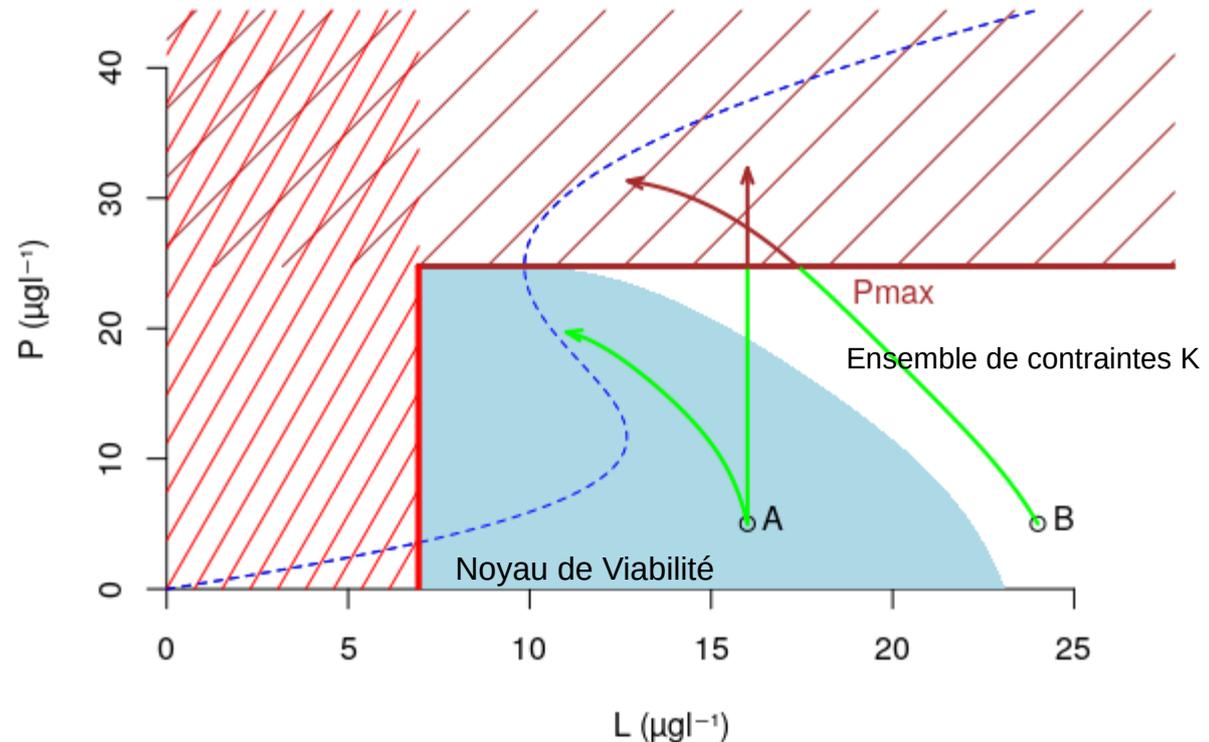
- Définir l'ensemble des états souhaitables
- Définir les moyens d'action admissibles
- Connaître la dynamique

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$u(t)$  dans  $[u_{\min}, u_{\max}]$

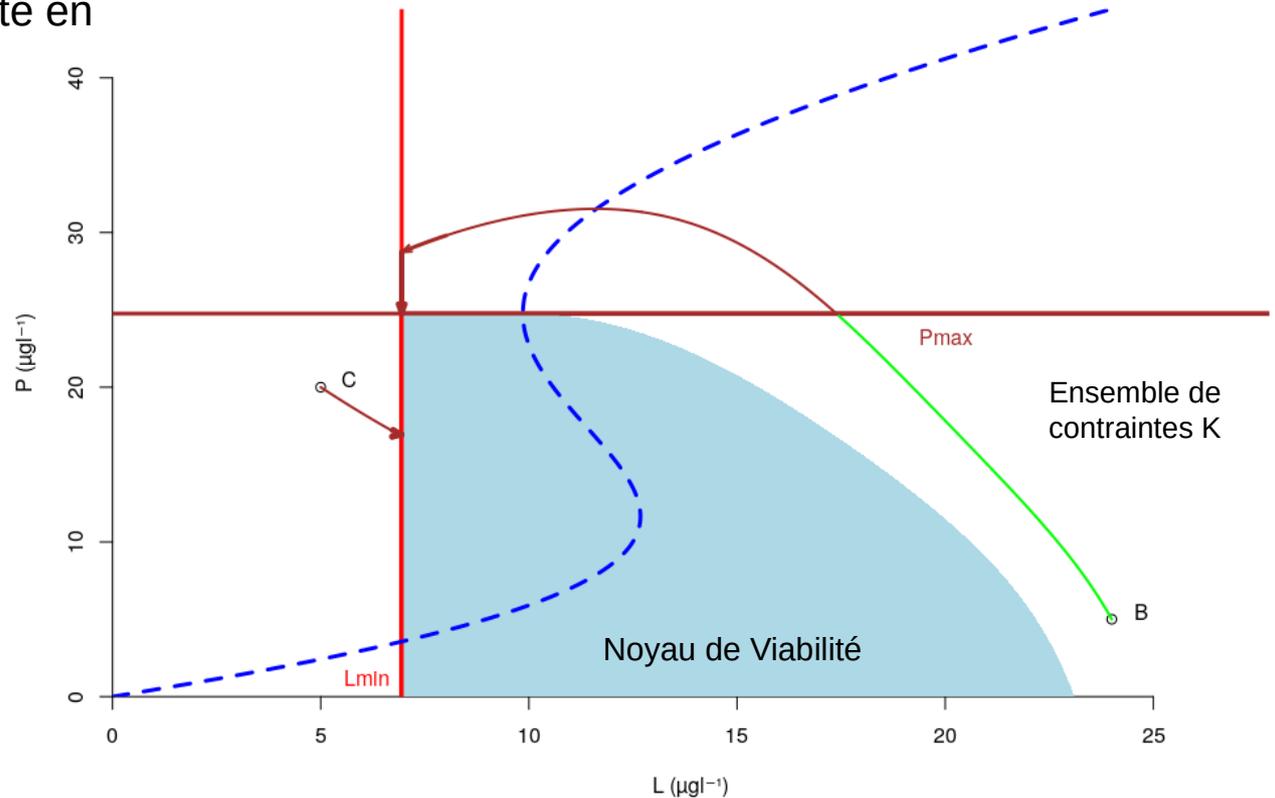
$(L, P)$  dans  $K$



# Viabilité du lac et des exploitations riveraines

## Comment rétablir le compromis s'il est perdu ?

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de rejoindre le noyau de viabilité en temps fini est son bassin de capture.



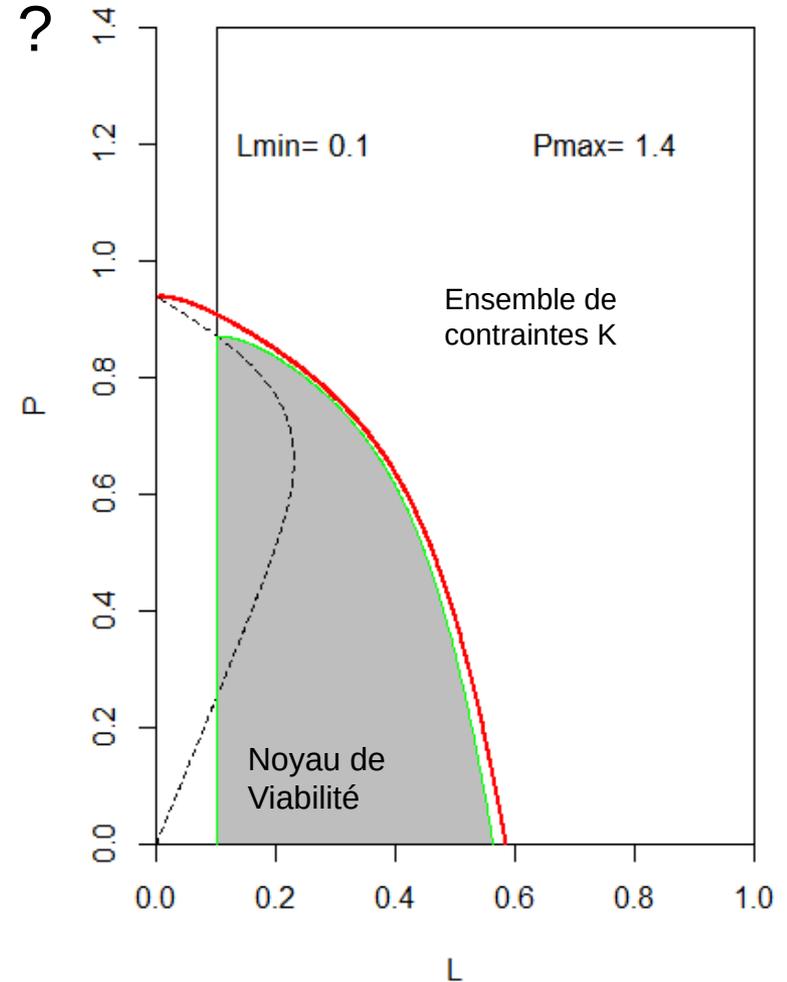
# Viabilité du lac et des exploitations riveraines

Comment rétablir le compromis s'il est perdu ?

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de rejoindre le noyau de viabilité en temps fini est son bassin de capture.

Dans le cas d'un lac irréversible, le bassin de capture peut être très petit.

Si une perturbation fait sortir du noyau de viabilité, il est possible que le lac ne redevienne jamais oligotrophe.



# Plan

- Comprendre la viabilité à partir d'un exemple : l'eutrophisation des lacs
- **Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité**
- Le point de vue de la viabilité vs. l'optimisation directe
  - l'exploitation forestière
- La gestion des incertitudes pour la viabilité individuelle et collective
- Liens avec les concepts associés à la durabilité
- Conclusion

# Le noyau de viabilité

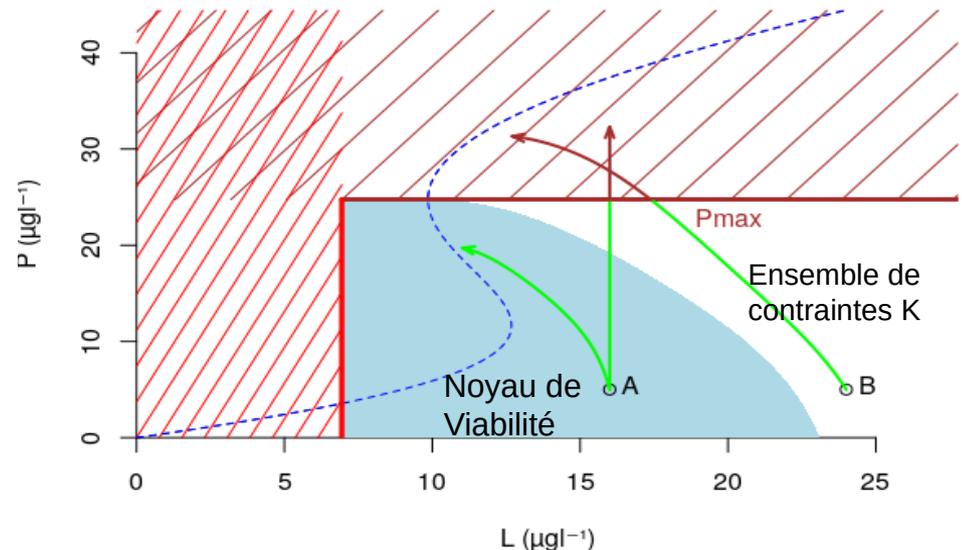
S : système dynamique continu ou discret  
S(x<sub>0</sub>) : ensemble des évolutions gouvernées  
par S qui partent de x<sub>0</sub>

$$S_c \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \text{ pour } t \geq 0 \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases}$$

$$Viab_{c,f,U}(K) = \{x_0 \in K \mid \exists x(\cdot) \in S_c(x_0) \text{ telle que } \forall t \geq 0, x(t) \in K\}$$

Fermeture du noyau de viabilité (Aubin, 1991)

- K fermé
- (f,U) est tel que :
  - Le graphe de U, {(x,u) | x dans X, u dans U(x)} est fermé
  - f est continue
  - f et U ont des croissances linéaires :
    - ||F(x)|| ≤ c(||x||+1)
    - L'image de chaque état {f(x,u), u dans U(x)} est convexe



# Le noyau de viabilité

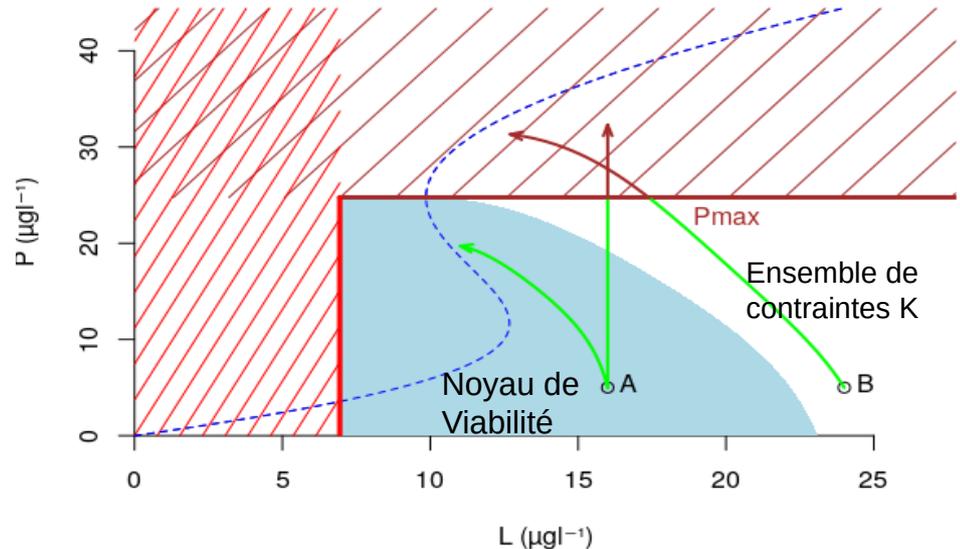
S : système dynamique continu ou discret  
S(x<sub>0</sub>) : ensemble des évolutions gouvernées  
par S qui partent de x<sub>0</sub>

$$S_d \begin{cases} x^{n+1} = f(x^n, u^n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \\ u^n \in U(x^n) \end{cases}$$

$$Viab_{d,f,U}(K) = \{x_0 \in K \mid \exists (x^n)_{n \in \mathbb{N}} \in S_d(x_0) \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, x^n \in K\}$$

Fermeture du noyau de viabilité cas discret

- K fermé
- Le graphe de U,  $\{(x,u), x \text{ dans } X, u \text{ dans } U(x)\}$  est fermé
- f est continue
- U est à croissance linéaire :  $\|U(x)\| \leq c(\|x\|+1)$



# Carte de régulation viable

Correspondance  $x \mapsto \tilde{U}(x) \subset U(x)$  telle que :

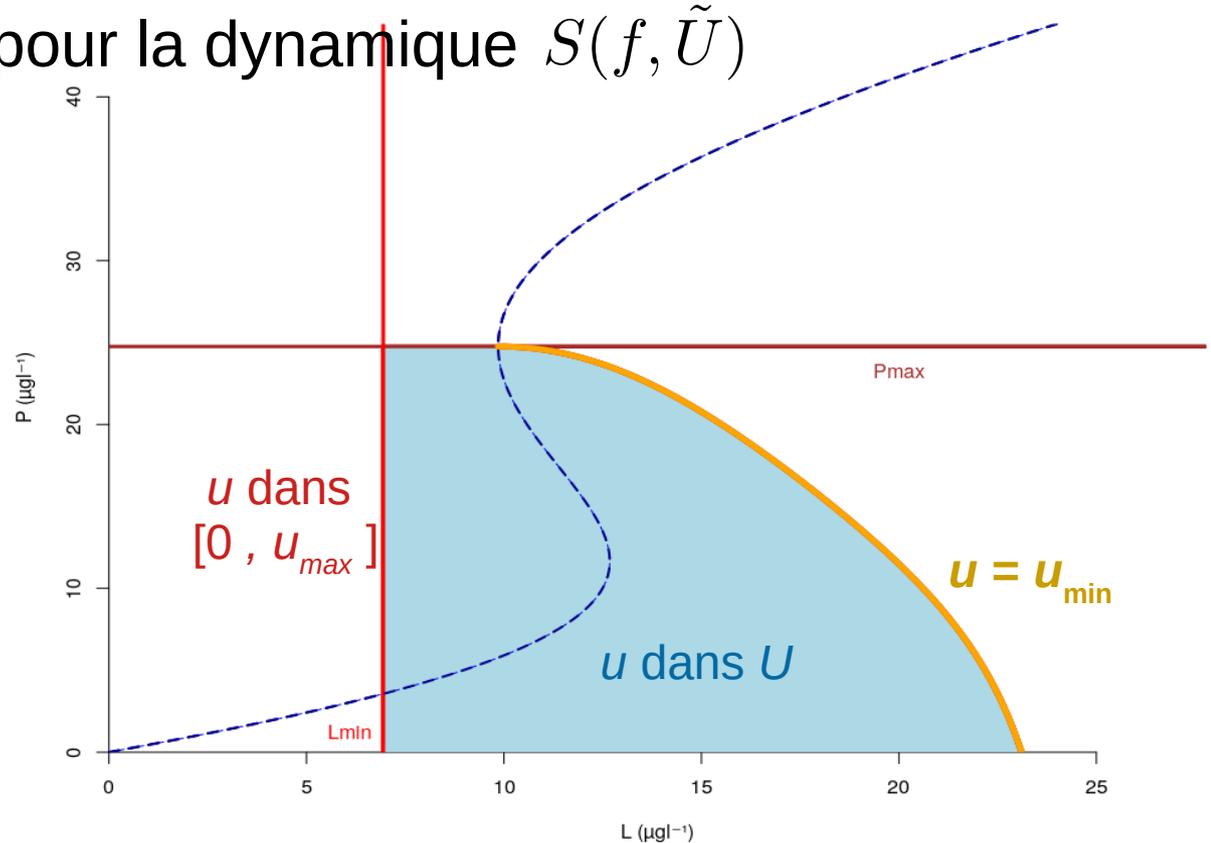
- $\text{viab}_{f, \tilde{U}}(K) = \text{viab}_{f, U}(K)$
- $\text{viab}_{f, \tilde{U}}(K)$  est invariant pour la dynamique  $S(f, \tilde{U})$

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$u(t)$  dans  $U = [u_{\min}, u_{\max}]$

$(L, P)$  dans  $K$



# Le bassin de capture

$S$  : système dynamique continu ou discret

$S(x)$  : ensemble des évolutions gouvernées par  $S$  qui partent de  $x$

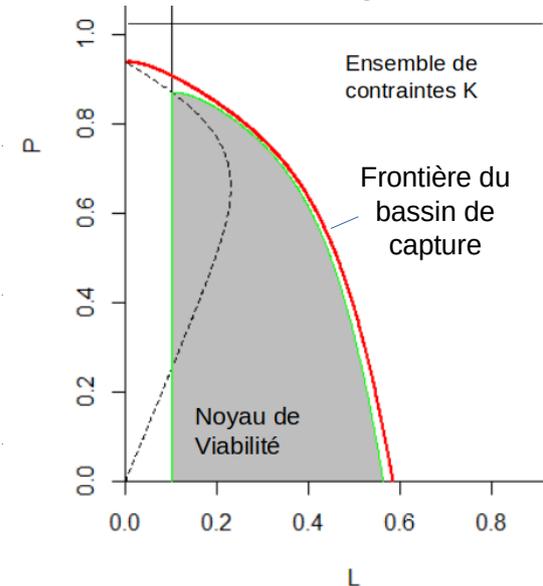
$C$  : cible à atteindre en temps fini

$$S_c \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \text{ pour } t \geq 0 \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases}$$

$$Capt_{c,f,U}(K, C) = \left\{ x \in K \mid \exists x(\cdot) \in S_c(x), \exists t^* \geq 0 \begin{cases} x(t^*) \in C \\ \forall t \in [0, t^*], x(t) \in K \end{cases} \right\}$$

Bassin de capture du noyau de viabilité :

- Dans un ensemble plus large
- Avec des moyens d'action éventuellement différents

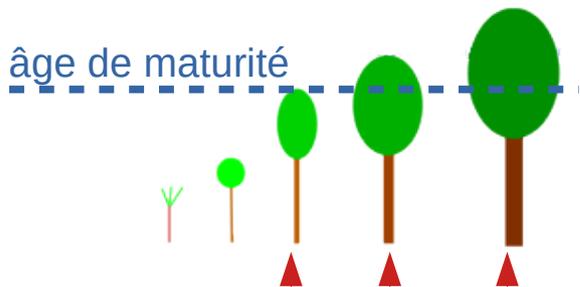


# Plan

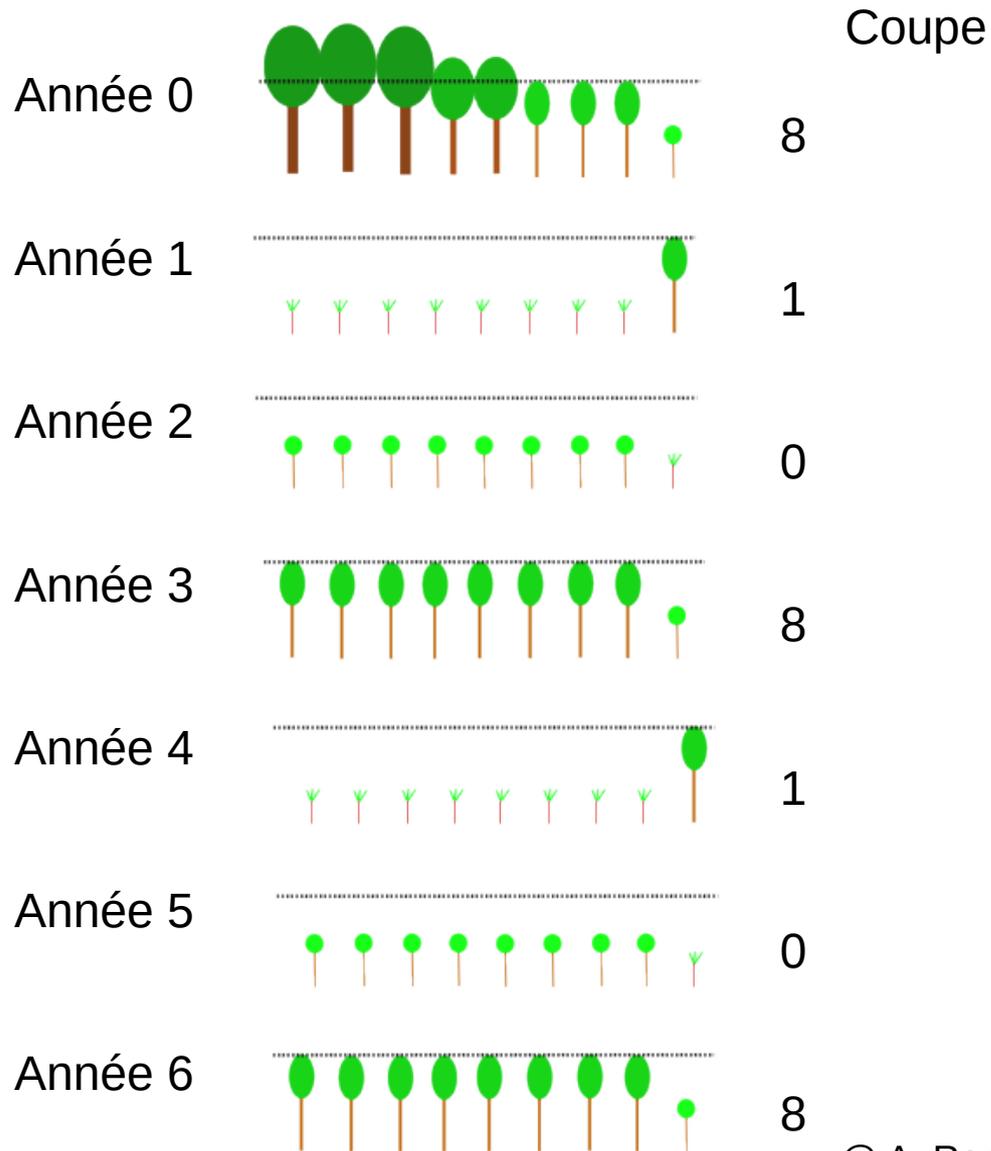
- Comprendre la viabilité à partir d'un exemple : l'eutrophisation des lacs
- Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité
- **Le point de vue de la viabilité vs. l'optimisation directe**
  - l'exploitation forestière
- La gestion des incertitudes pour la viabilité individuelle et collective
- Liens avec les concepts associés à la durabilité
- Conclusion

# Optimisation directe vs. Viabilité

A. Rapaport et al, (2003)



- Coupe par parcelle entière
- Si coupe, plantation de 
- Pas de mortalité naturelle ni d'aléas
- Croissance homogène par parcelle





# Problème de Viabilité

- On a  $S$  parcelles  $x(t) \in K = \{x \in \mathbb{N}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = S\}$
- Les moyens d'actions qu'on se donne :  $u(x) \geq \underline{u}$
- Si  $x_0$  est dans le noyau de viabilité de la dynamique (1) dans  $K$  , alors il existe au moins une évolution qui reste indéfiniment dans  $K$ 
  - Il est possible d'exploiter au minimum  $\underline{u}$  parcelles à chaque pas de temps
  - On peut ensuite rechercher des trajectoires dans le noyau pour lesquelles on aura des gains d'exploitation supérieurs

# Optimisation directe

Recherche des stratégies de contrôle qui maximisent un critère intertemporel pour la situation initiale  $x_0$

$$J(x_0, u(.)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^T \delta^t U(u(t))$$

Dans le cas de la forêt on va considérer un horizon infini

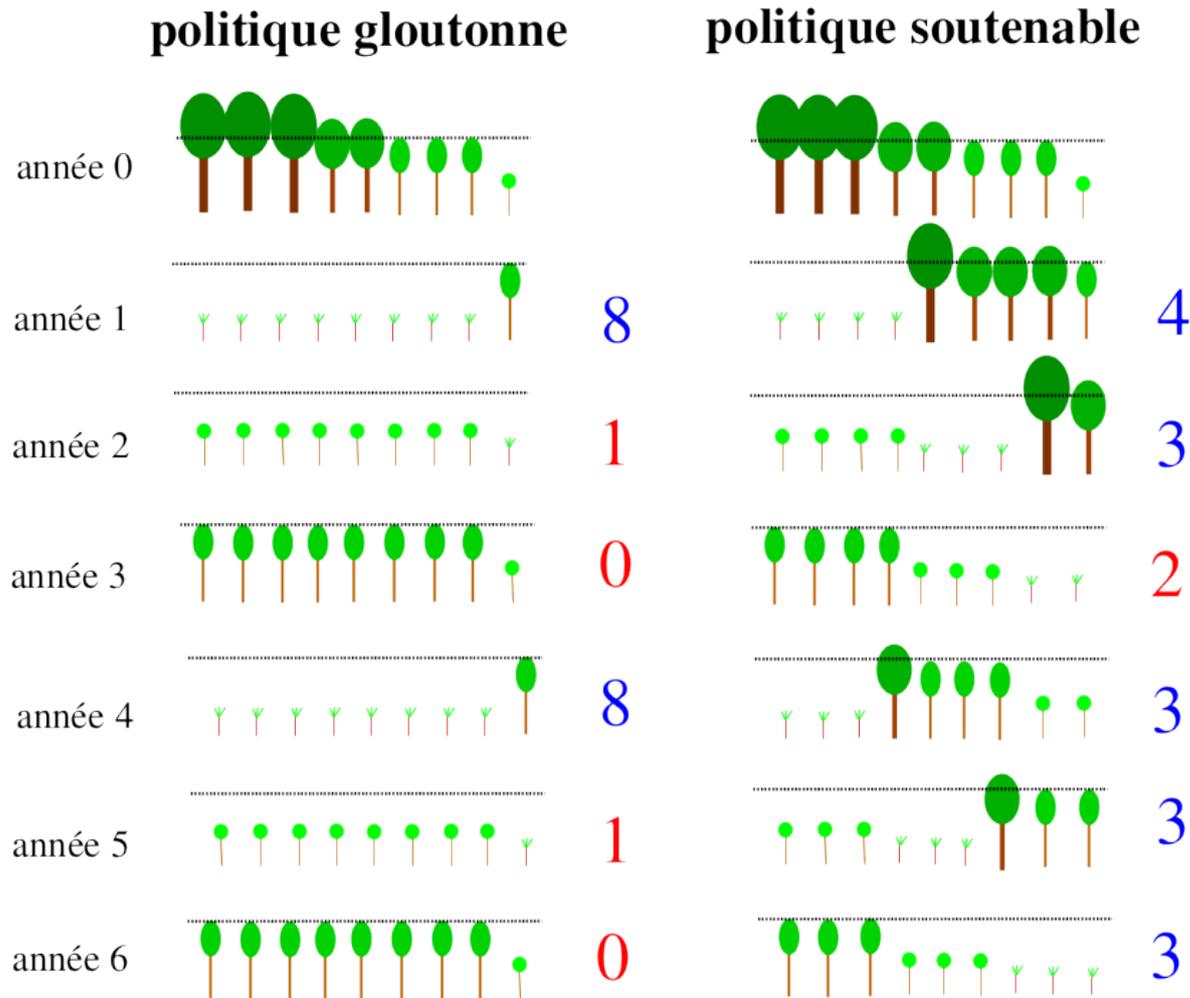
$$J(x_0, u(.)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^T \delta^t u(t)$$

On résout en recherchant les solutions de l'équation de Bellman

$$V(x) = \max_{u \in [0, (Ax)_1]} \{U(u) + \delta V(Ax + Bu)\}$$

$\delta \in ]0, 1[$  est le facteur d'actualisation  
 $U$  est la fonction d'utilité

# Politiques optimales particulières

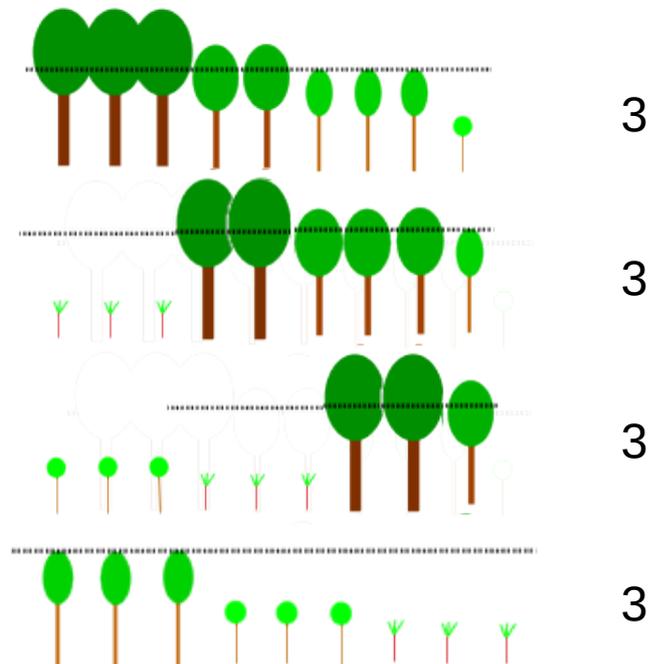


# Politique viable

Coupe

Avec  $u(x) \geq 3$

- La situation initiale est sur la frontière du noyau de viabilité
- On applique la politique gloutonne sur les contrôles viables
- La partie transitoire de la dynamique vérifie la contrainte sur le contrôle



En général une trajectoire viable est sous-optimale (car l'espace exploré est en général plus petit que lors de l'optimisation directe) ...

Mais les contraintes sont vérifiées en tout temps

# Plan

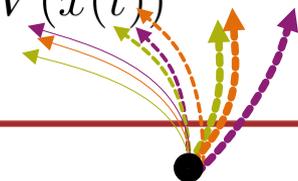
- Comprendre la viabilité à partir d'un exemple : l'eutrophisation des lacs
- Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité
- Le point de vue de la viabilité vs. l'optimisation directe
  - l'exploitation forestière
- **La gestion des incertitudes pour la viabilité individuelle et collective**
- Liens avec les concepts associés à la durabilité
- Conclusion

# Gestion ensembliste des incertitudes

Propriété de viabilité garantie : ensemble d'états pour lequel il existe une régulation pour laquelle toutes les évolutions restent dans l'ensemble de contraintes (pour toutes les perturbations admissibles)

$$Svc(f, U, V) \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t), v(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \\ v(t) \in V(x(t)) \end{cases}$$

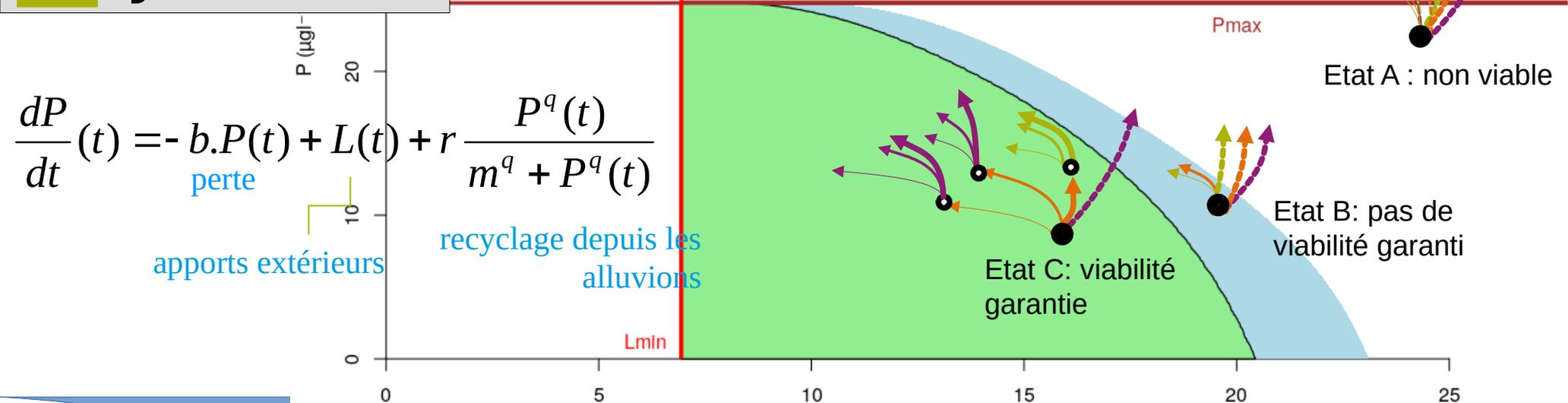
-  évolution viable
-  évolution non-viable
-  } différentes valeurs du vecteur de perturbation  $v$
-  } différentes valeurs du vecteur de contrôle



Etat A : non viable

Etat B: pas de viabilité garanti

Etat C: viabilité garantie



$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

perte

apports extérieurs

recyclage depuis les alluvions

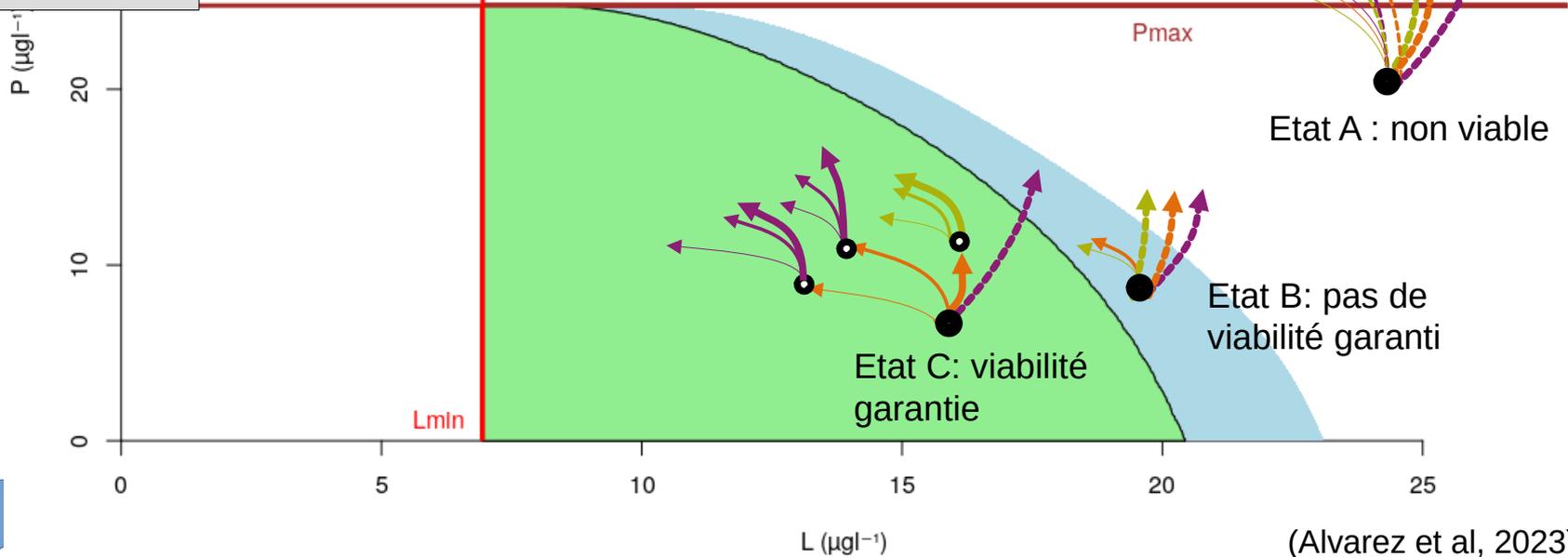
# Gestion ensembliste des incertitudes

Propriété de viabilité garantie : ensemble d'états pour lequel il existe une régulation pour laquelle toutes les évolutions restent dans l'ensemble de contraintes (pour toutes les perturbations admissibles)

- évolution viable
- - - évolution non-viable
- } différentes valeurs du vecteur de perturbation  $v$
- } différentes valeurs du vecteur de contrôle  $u$

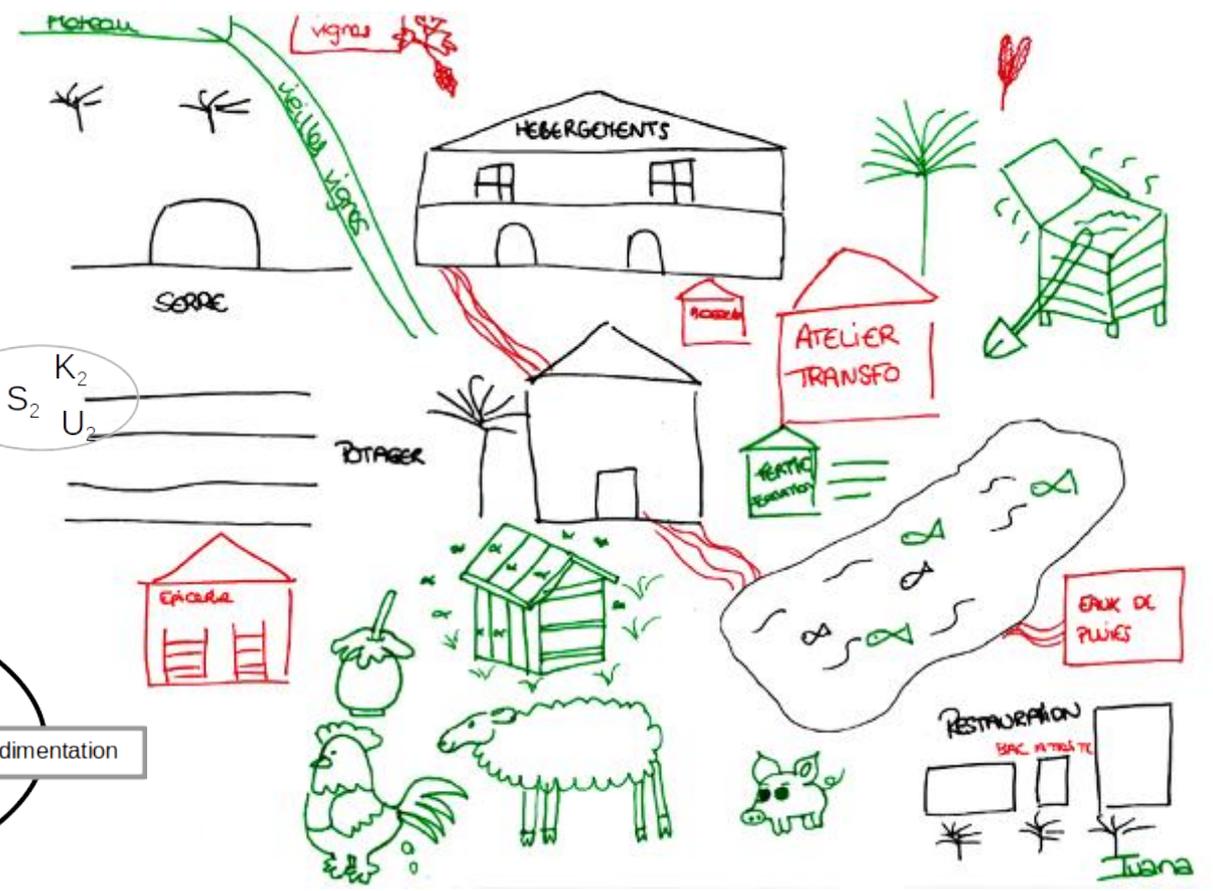
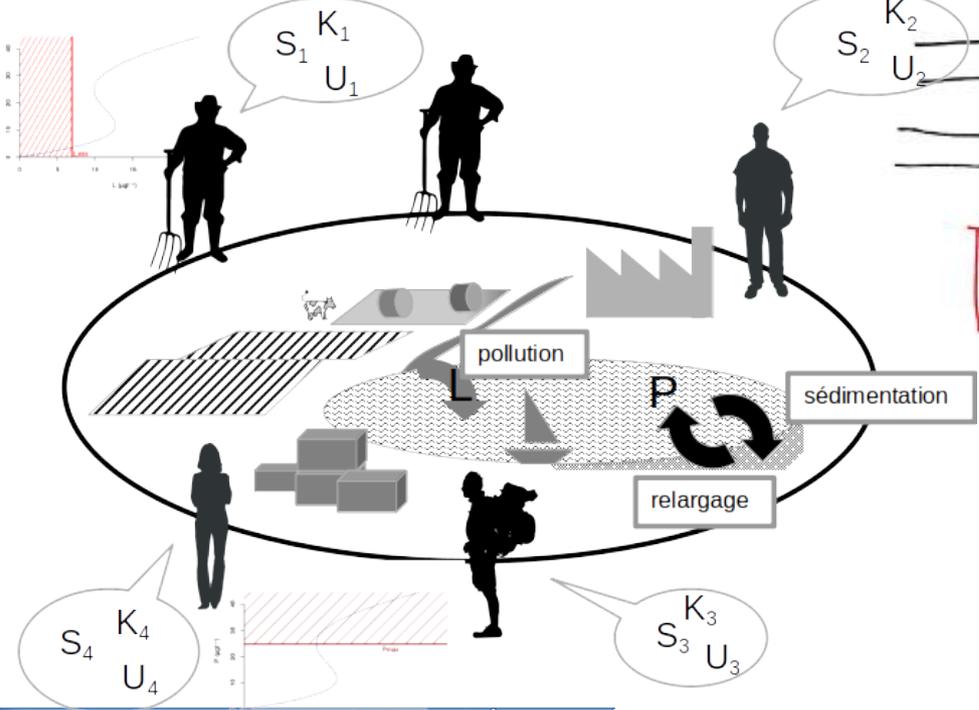
$$f_B(x, u, v) = \begin{pmatrix} u \\ -v_1 P + L + r \left( (1 - v_2) \frac{P^{v_3}}{m^{v_3} + P^{v_3}} + v_2 \frac{P}{P + m e^{(-v_4(P-m))}} \right) \end{pmatrix}$$

deux modèles possibles  
 perte  
 apports extérieurs  
 recyclage depuis les alluvions



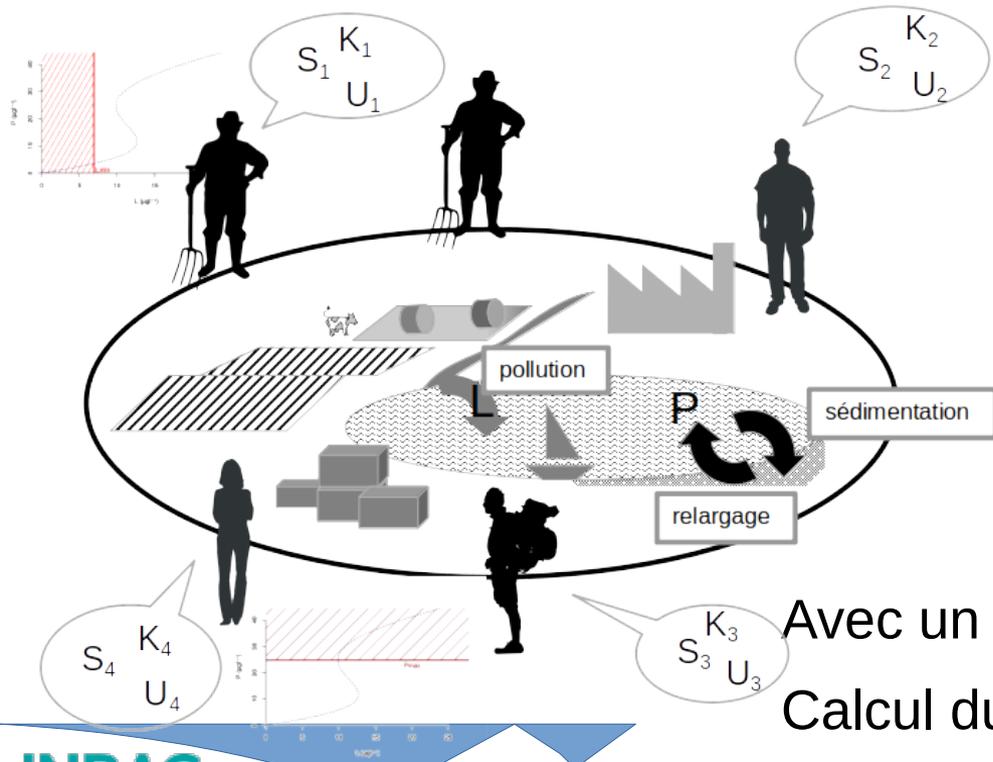
(Alvarez et al, 2023)

# Viabilité individuelle et collective



Socio-écosystèmes complexes

# Viabilité collective



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \\ \frac{dL}{dt} = h \left( \sum_{i=1}^N u_i \right) \\ \frac{dK_i}{dt} = f_i(K_i(t), P(t), L(t), u_i) \\ K_i \in [K_{i,min}, +\infty[ \\ P \leq P_{max} \\ u_i \in U_i \end{array} \right.$$

Avec un nombre d'acteurs  $N$  parfois très grand  
 Calcul du noyau global dans  $\mathbb{R}^n \times \left( \prod_{i=1}^N \mathbb{R}^{n_i} \right) \times \left( \prod_{i=1}^N \mathbb{R}^{p_i} \right)$   
 Et synchronisation des acteurs !

# Viabilité individuelle et collective

- Passer d'un système global à  $N$  problèmes individuels

$$\frac{dK_i}{dt} = f_i(K_i(t), P(t), L(t), u_i)$$

- Ce qui ne peut pas être contrôlé est perçu comme une perturbation (un *tyche*)

$$\frac{dL}{dt} = h(u_i + v_i) \quad \text{avec } v_i = \sum_{j \neq i} u_j$$

- Chacun prend des engagements sur ce qu'il peut contrôler, ce qui réduit l'amplitude des tyches chez les autres
- $N$  noyaux garantis individuels sont calculés
- On doit ensuite rechercher, pour chaque valeur des variables globales, celles qui sont présentes dans le noyau individuel de chaque acteur

# Plan

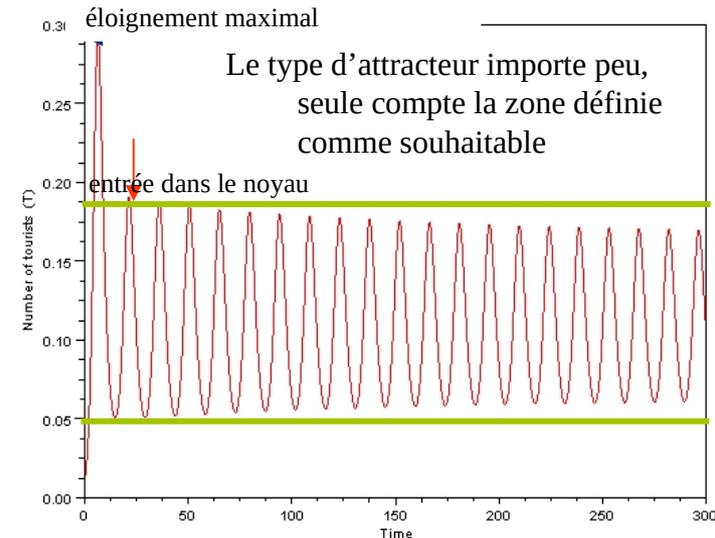
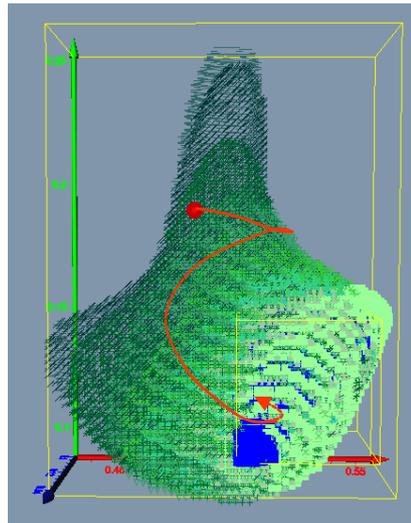
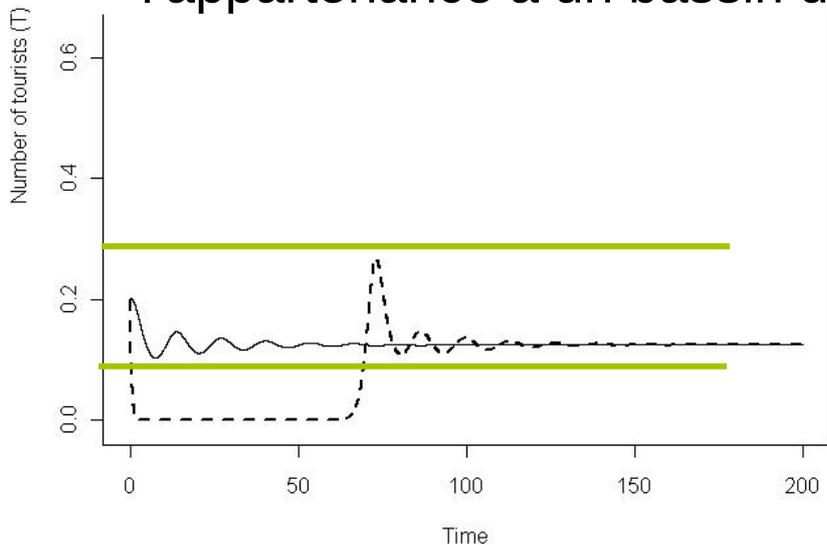
- Comprendre la viabilité à partir d'un exemple : l'eutrophisation des lacs
- Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité
- Le point de vue de la viabilité vs. l'optimisation directe
  - l'exploitation forestière
- La gestion des incertitudes pour la viabilité individuelle et collective
- **Liens avec les concepts associés à la durabilité**
- Conclusion

# Viabilité et durabilité

Faire évoluer un système dans un ensemble viable c'est éviter le compromis court terme / long terme

- Les contraintes sont satisfaites en tout temps
- Les comportements transitoires sont pris en compte
- On ne privilégie pas le comportement asymptotique ou l'appartenance à un bassin d'attraction

Wei, W., Alvarez, I., and Martin, S. (2013). Sustainability analysis: Viability concepts to consider transient and asymptotical dynamics in socio-ecological tourism-based systems. *Ecological Modelling*, 251:103–113





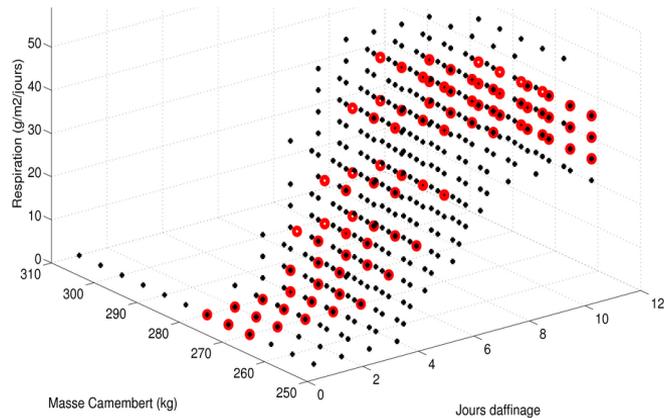
# Viabilité et innovation

Résoudre un problème de viabilité c'est calculer un ensemble de possible à partir duquel on peut se poser de nouvelles questions

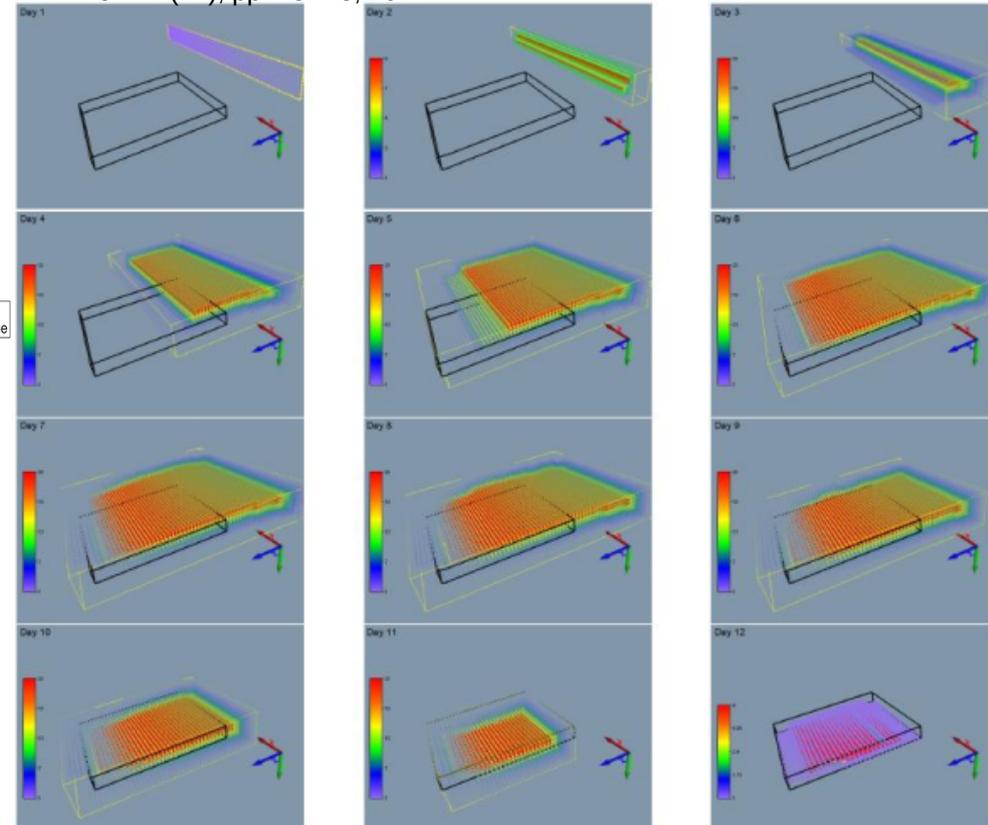
- Avec la garantie que les contraintes de viabilité seront satisfaites
- On peut intégrer de nouveaux points de vue

Exemple : affinage du camembert

Calcul du tube de viabilité du camembert  
(capture d'une cible en 12 jours)

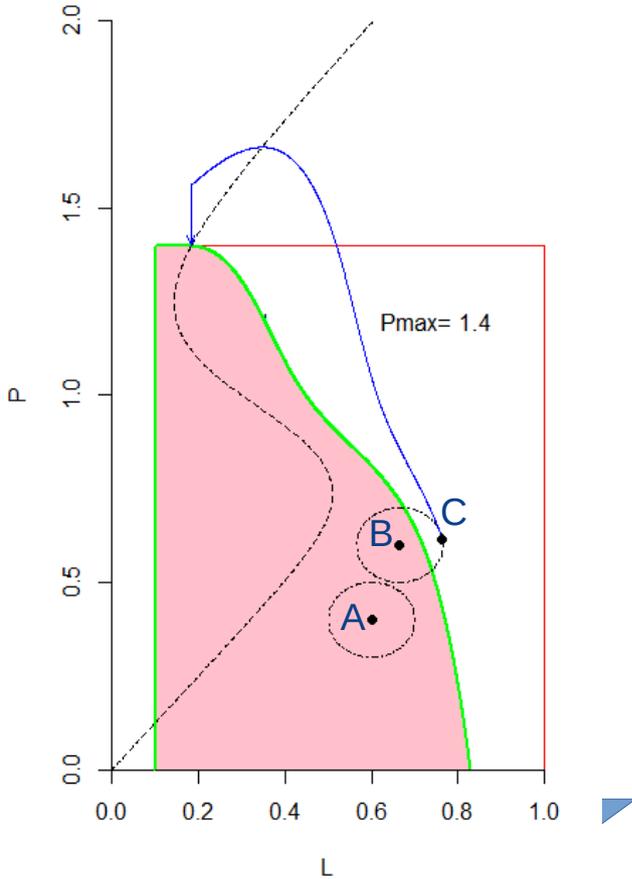


Mesmoudi et al, Coupling geometric analysis and viability theory for system exploration. Application to a food living system". Journal of Process Control, vol. 24 (12), pp. 18--28, 2014



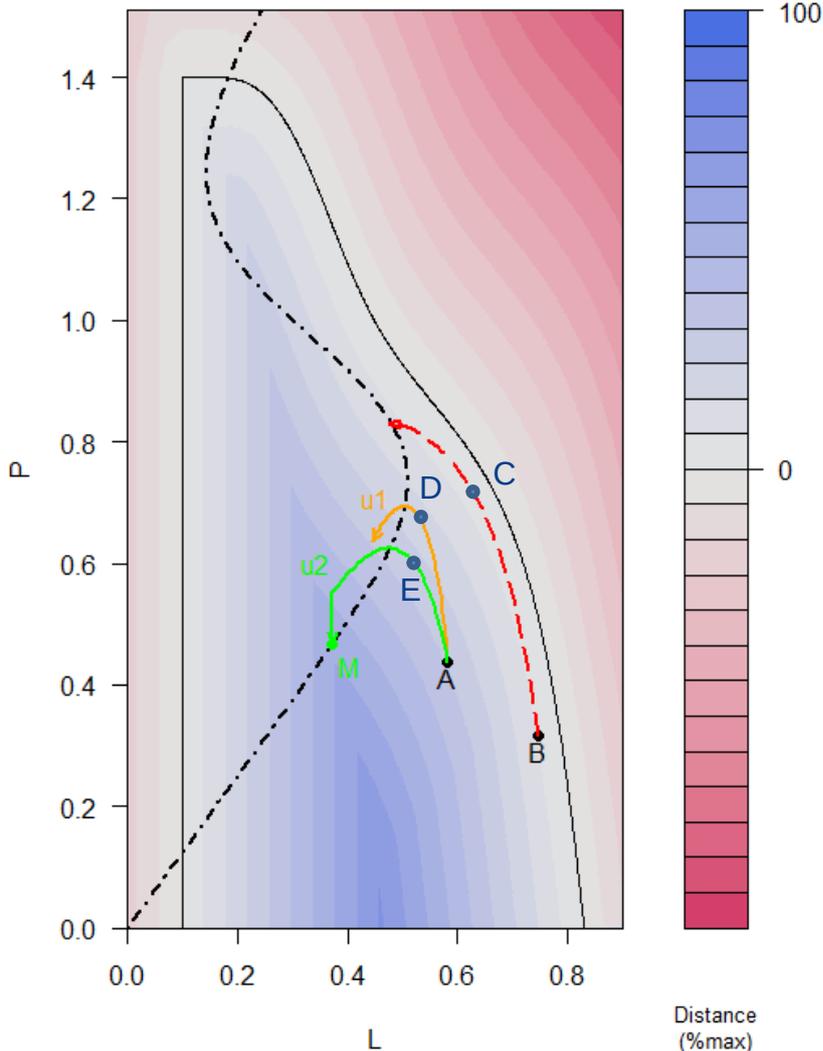
# Viabilité et robustesse

Conserver la propriété souhaitée face à de nouvelles perturbations : un indicateur dans le noyau de viabilité



- La situation de deux points dans le noyau de viabilité peut être très différente face à des perturbations qui n'ont pas été prises en compte dans le modèle
- La robustesse va permettre de mesurer cette différence de situation
- Robustesse à des perturbations dans l'espace d'état

# Viabilité et robustesse



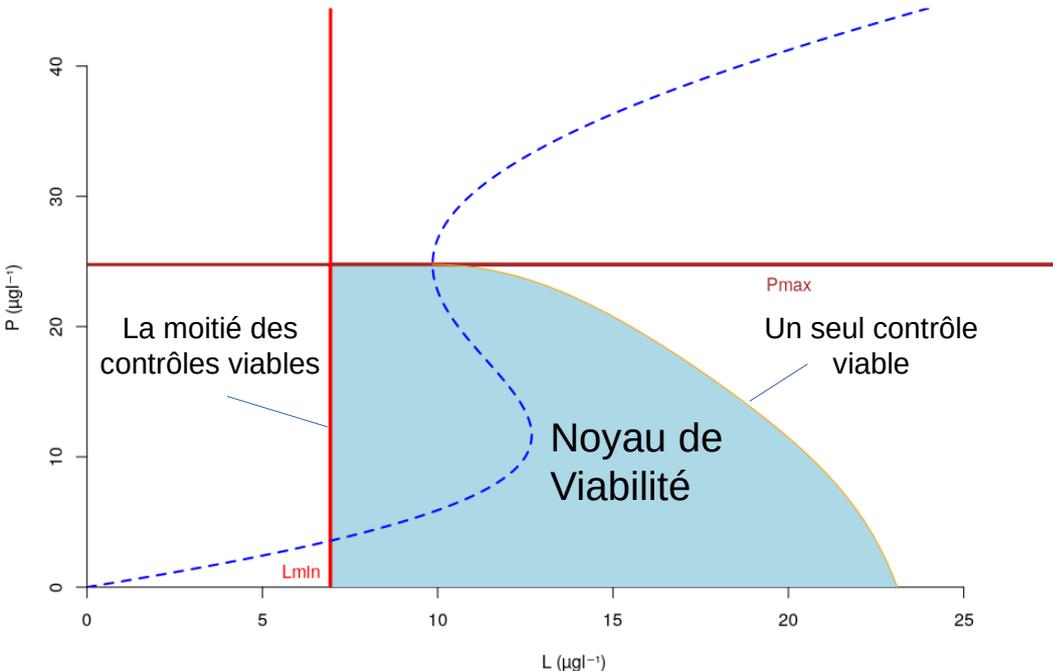
Conserver la propriété souhaitée face à de nouvelles perturbations ou incertitudes dans l'espace d'état

- La robustesse en un état peut être définie comme la borne supérieure de la robustesse de toutes les évolutions issues de cet état, la robustesse d'une évolution étant la taille maximale de la perturbation qui peut être supportée le long de l'évolution sans quitter le noyau de viabilité
- A partir du noyau de viabilité il est possible de construire des trajectoires à robustesse croissante

# Viabilité et flexibilité

Conserver la propriété souhaitée face à aux incertitudes : un indicateur dans le noyau de viabilité

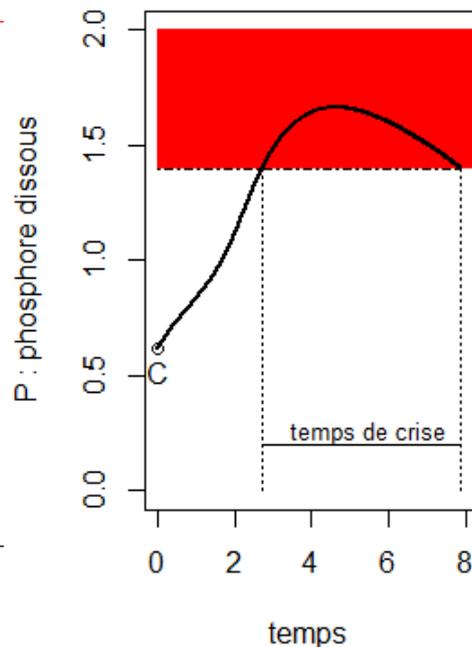
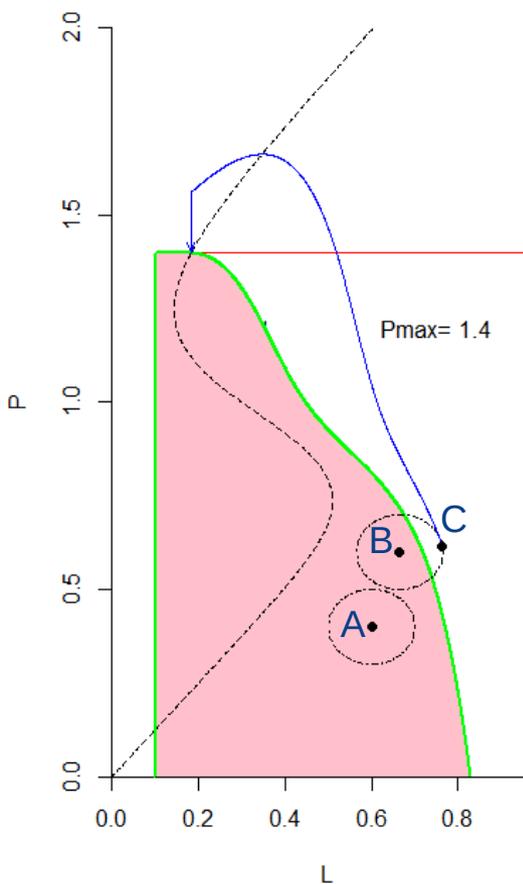
- Flexibilité : Indicateur fondé sur la capacité de contrôle
- Part des contrôles viables parmi les contrôles admissibles
- Définition plus riche dans les systèmes discrets



R. Sabatier, L.G. Oates, and R.D. Jackson. (2015) Management flexibility of a grassland agroecosystem: A modeling approach based on viability theory. *Agricultural Systems*, 139:76 – 81, 2015  
Sabatier, R., Doyen, L., Tichit, M. (2012). Action versus result-oriented schemes in a grassland agroecosystem: a dynamic modelling approach. *PLOS ONE*, 7 (4). DOI:10.1371/pone.0033257

# Viabilité et résilience

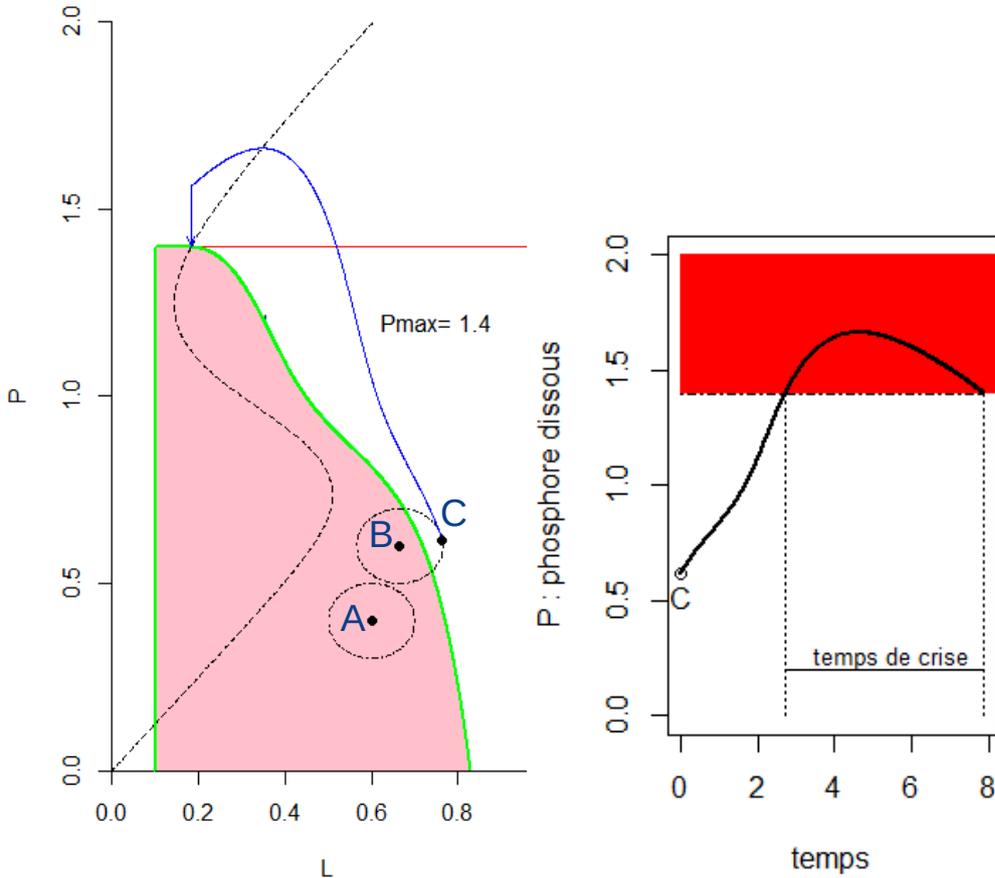
Est-il possible de rétablir la propriété souhaitée ? Oui dans le bassin de capture



- La résilience est nulle hors du bassin de capture
- La résilience est infinie pour les états du noyau de viabilité que la perturbation maximale ne fait pas sortir du noyau
- Utilisation du temps de crise

# Viabilité et résilience

Est-il possible de rétablir la propriété souhaitée ? Oui dans le bassin de capture



➤ Indicateur de résilience quand la propriété peut être perdue face à de nouvelles perturbations

➤ Utilisation du temps de crise

Trajectoire qui minimise le temps de crise :

$$u(t) = u_{\min} \text{ si } L(t) > L_{\min}$$

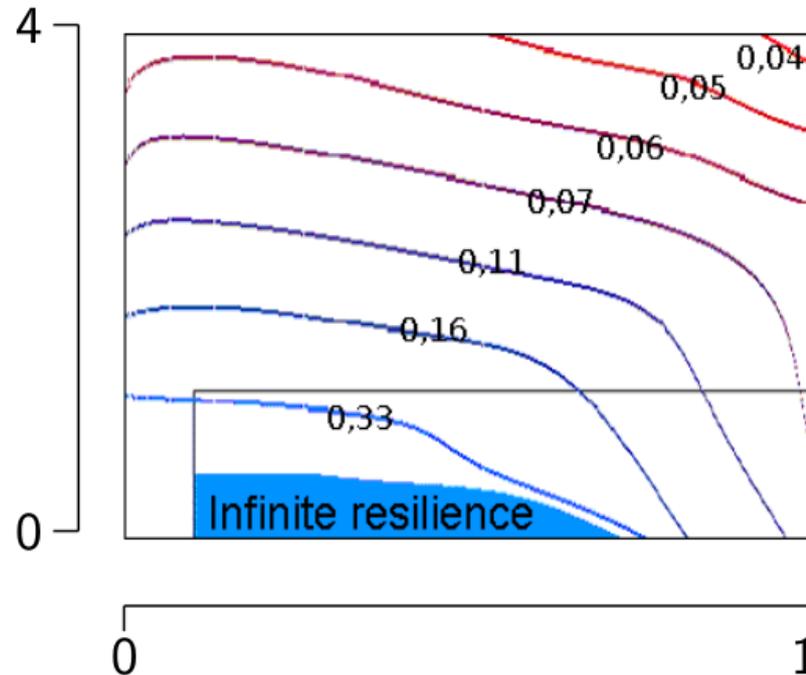
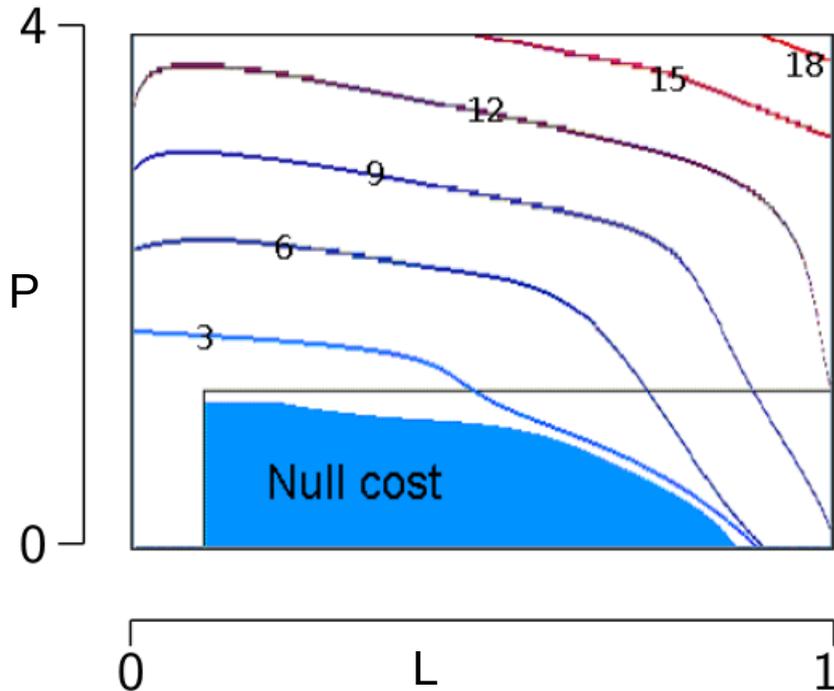
$$u(t) = 0 \text{ si } L(t) = L_{\min}$$

La résilience est définie comme l'inverse du coût associé au temps de crise

S. Martin. 2004. The cost of restoration as a way of defining resilience: a viability approach applied to a model of lake eutrophication. *Ecol. Soc.*, 2(9):8  
Doyen, L., Saint-Pierre, P. Scale of Viability and Minimal Time of Crisis. *Set-Valued Analysis* 5, 227–246 (1997).

# Viabilité et résilience

Perturbation envisagée  $D(x) = \{(0,y), y \leq 0.5\}$   
Pas de zone privilégiée  
Coût proportionnel au temps de crise



# Plan

- Comprendre la viabilité à partir d'un exemple : l'eutrophisation des lacs
- Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité
- Le point de vue de la viabilité vs. l'optimisation directe
  - l'exploitation forestière
- La gestion des incertitudes pour la viabilité individuelle et collective
- Liens avec les concepts associés à la durabilité
- **Conclusion**

# Intérêt de l'approche

- Contraintes à satisfaire en tout temps : équité intergénérationnelle et égalité de traitement des enjeux
- Particulièrement adaptée quand la définition d'une fonction objectif commune est difficile
- Possibilité d'optimisation dans le noyau de viabilité après calcul du noyau : garantie absolue de respect des contraintes

Merci de votre attention

# Bibliographie complémentaire

- En lien avec les approches économiques classiques

Doyen L., Martinet V., 2012, Maximin, Viability and Sustainability, Journal of Economic Dynamic and Control, 36, 9, 1414–1430.

DeLara M.. & Doyen L., 2008, Sustainable Management of Natural Resources Mathematical Models and Methods, Springer

A. Rapaport, J-P Terreaux, L. Doyen. Viability analysis for the sustainable management of renewable resources. Mathematical and Computer Modelling, Elsevier, 2006, 43 (5-6), pp.466-484. {10.1016/j.mcm.2005.12.014}

# Viabilité stochastique : gestion probabiliste des incertitudes

Système discret :  $x(t+1)=G(x(t),u(t),w(t))$  avec  $t$  de 0 à  $T$ ,  $w(\cdot) \in \Omega$  une trajectoire de vecteurs d'incertitude, avec une distribution de probabilité sur Oméga

$$\Omega_{\hat{c}, t_0, x_0} = \left\{ \omega(\cdot) \in \Omega \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ x(t+1) = G(t, x(t), c(t), \omega(t)) \\ c(t) = \hat{c}(t, x(t)) \\ \mathcal{I}_k(t, x(t), c(t)) \geq \tau_k, k = 1, \dots, K \\ t = t_0, \dots, T \end{array} \right. \right\}$$

V. Martinet, J. Peña-Torres, M. De Lara, H. Ramírez. (2016) Risk and Sustainability: Assessing Fishery Management Strategies Environ Resource Econ 64:683–707

Ensemble des scénarios viables (qui respectent les contraintes sur les indicateurs à chaque pas de temps)

Cela permet de définir la probabilité de viabilité d'une stratégie de gestion

$$\Pi(\hat{c}, \tau_1, \dots, \tau_K) = \mathbb{P} \left\{ \omega(\cdot) \in \Omega \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ x(t+1) = G(t, x(t), c(t), \omega(t)) \\ c(t) = \hat{c}(t, x(t)) \\ \mathcal{I}_k(t, x(t), c(t)) \geq \tau_k, k = 1, \dots, K \\ t = t_0, \dots, T \end{array} \right. \right\}$$

D'autres références :

- Doyen L., De Lara M., (2010), Stochastic viability and dynamic programming, Systems and Control Letters. 59, 10, 629-634.
- C Rougé, JD Mathias, G Deffuant. (2014). Relevance of control theory to design and maintenance problems in time-variant reliability: The case of stochastic viability. Reliability Engineering & System Safety 132, pp.250-260.
- Alais, J.-C., Carpentier, P., and De Lara, M. (2017). Multi-usage hydropower single dam management: chance-constrained optimization and stochastic viability. Energy Systems, 8(1):7–30

# Algorithmes

- Un algorithme général (cas non-linéaire, temps infini) avec convergence vers le noyau : Saint-Pierre, 1994, Cet algorithme est la base de nombreux autres, tous soumis à la malédiction de la dimensionnalité. Saint-Pierre, P. (1994). Approximation of the viability kernel. *Applied Mathematics and Optimization*, 29(2):187–209
- Plusieurs algorithmes avec convergence dans des cas particuliers: cas linéaire, temps fini, temps et/ou états discrets, etc. (de Lara et Doyen, 2008; Maidens et al, 2013; Brias et al, 2016, ...)
- Quelques algorithmes radicalement différents ou basés sur le calcul de trajectoires (Bokanowsky et al, 2006, Bonneuil, 2006, ...)
- Rares librairies (Vikaasa: Krawczyk et al 2013, sous Matlab en 2019) et codes disponibles (Viablab: Desilles, 2020; Viabilitree: Alvarez et al, 2016)
- Plusieurs tentatives de couplage avec les méthodes d'apprentissage (SVM Deffuant et al, 2006, plus proche voisin Wei et al, 2012, etc.) mais rien de déterminant ...
  - Nouvelles opportunités avec les possibilités du deep learning

S. Bansal and C. J. Tomlin, "DeepReach: A Deep Learning Approach to High-Dimensional Reachability," 2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2021, pp. 1817-1824, doi: 10.1109/ICRA48506.2021.9561949.