1933, ...1937, ... La théorie de Milne, une alternative à la Cosmologie Relativiste ?

Jean-Pierre Treuil, AEIS

1 Mars 2021

1. Contexte historique
2. Le projet Milnien
3. Approche technique succincte
4. A quoi ressemble l'Univers Milnien et son Histoire ?
5. Le débat autour de la Théorie de Milne
6. Annexe : Observateurs équivalents. Epoques et Distances.

Au début des années 30, certitudes et interrogations

1. 1925 : certaines "nébuleuses" sont bien hors de notre galaxie (Hubble)
2. 1929 : plus elles sont loin, plus elles ont décalées vers le rouge (Hubble)
3. 1931 : Einstein admet (avec de Sitter) que l'Univers peut être en expansion
4. pendant toutes les années 30, poursuite intense,
   à des distances croissantes
   du décompte des galaxies et de l'étude la relation distance/redshift
5. Ce "redshift" résulte-t-il d'un effet Doppler ?
   signifie-t-il donc "plus elles sont loins, plus elles s'éloignent vite" ?
   (Hubble, Tolman, McVittie, McCrea,...)
6. Si toutefois c'est le cas,
   ce phénomène est-il interprétable par une "expansion de l'espace",
   par la Cosmologie relativiste (Milne, McCrea, Robertson, Walker, ...) ?

Le projet Milnien qui admet que les galaxies s'éloignent réellement.
est de fournir une théorie alternative à la Cosmologie Relativiste
(Il ne s'attaque pas de front à la Relativité générale, mais....)

1. en tirant toutes les conséquences d'un "Principe cosmologique" appliqué dans le cadre de la relativité restreinte

2. en centrant son modèle sur des variables directement observables à l'aide d'instruments simples :
   des horloges pour déterminer dates et distances
   des théodolites pour déterminer des directions

3. espérant déduire une théorie de la gravitation
   dans laquelle la distribution de matière et d'énergie
   n'influe pas sur la géométrie de l'univers
   L'espace-temps n'a pas de réalité physique,
   simplement une manière de repérer les rapports entre évènements.

Principe cosmologique
L'univers doit apparaître le même pour tous les observateurs

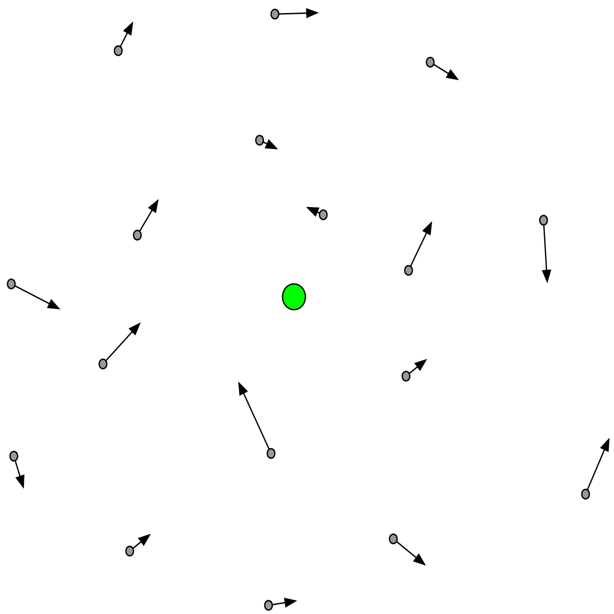
Cette formulation est déjà différente de celle de la cosmologie relativiste, (il n'y a pas d'observateurs en situation spéciale).
Mais Milne la précise en introduction de son article de 1933, par :

1. *Not only the laws of nature, but also the events occurring in nature, the wordl itself, must appear the same to all observers, wherever they be...*
2. en pousuivant : *By "the world" I do not mean "the world at any instant" but the totality of the flux of events".*

Mais que signifie exactement *the same to all observers*?
La théorie de Milne est construite sur une traduction mathématique de cette expression.

Les galaxies les plus lointaines
sont nécessairement celles dont la vitesse radiale est la plus grande.

$$v_r = \frac{r - r_0}{t - t_0} \approx \frac{r}{t} \text{ si } t \gg t_0 \text{ et } r \gg r_0$$



$$r - r_0 = v_r(t - t_0) \Rightarrow r \approx v_r t \text{ si } t \gg t_0 \text{ et } r \gg r_0$$

Les galaxies qui se sont échappées les plus vite
sont nécessairement celles qui sont les plus lointaines

L'univers doit être tel
que tous les observateurs puissent en avoir une vision identique.

Deux observateurs A_1 et A_2
Dans un référentiel newtonien : $\vec{r} = [x, y, z], \vec{\nu} = [u, v, w], \vec{\gamma} = [p, q, r], t$

1. même expression mathématique $f(\vec{r}, \vec{\nu} \mid t)$ de la densité des particules au voisinage de $\vec{r}, \vec{\nu}$ à l'instant t

$$f(\vec{r}_1, \vec{\nu}_1, t_1) d\omega_1 = f(\vec{r}_2, \vec{\nu}_2, t_2) d\omega_2$$

2. même expression mathématique $g(\vec{r}, \vec{\nu} \mid t)$ de l'accélération des particules au voisinage de de $\vec{r}, \vec{\nu}$ à l'instant t

$$\vec{\gamma}_1 = g(\vec{r}_1, \vec{\nu}_1, t_1) \quad \vec{\gamma}_2 = g(\vec{r}_2, \vec{\nu}_2, t_2)$$

Mais quelle relation entre les observateurs A_1 et A_2, et, partant, quelles transformations $[\vec{r}_1, \vec{\nu}_1, t_1, \vec{\gamma}_1] \Leftrightarrow [\vec{r}_2, \vec{\nu}_2, t_2, \vec{\gamma}_2]$?

1. ces deux observateurs se déplacent en mouvement relatif uniforme l'un par rapport à l'autre, avec une vitesse relative quelconque
2. ces deux observateurs se sont rencontrés à un certain moment.

La seconde restriction peut être levée facilement. La première, non

Les transformations $[\vec{r}_1, \vec{\nu}_1, t_1, \vec{\gamma}_1] \Leftrightarrow [\vec{r}_2, \vec{\nu}_2, t_2, \vec{\gamma}_2]$
appartiennent alors à un sous groupe des transformations de Lorentz

Peut t-on trouver une cinétique de l'univers, telle que ces deux observateurs la décrivent de manière mathématiquement identique ?
Réponse : Oui !

$$
\begin{aligned}
f(\vec{r},\vec{\nu}\mid t) &= \frac{\psi(\xi)}{c^6 X^{\frac{3}{2}} Y^{\frac{5}{2}}}\\
g(\vec{r},\vec{\nu}\mid t) &= [\vec{r}-\vec{\nu}t]\frac{Y}{X}G(\xi)\\
G(\xi) &= -1 - C[(\xi-1)^{\frac{3}{2}}\psi(\xi)]^{-1}
\end{aligned}
$$

formules dans lesquelles :

$$
X = t^2 - \frac{\vec{r}.\vec{r}}{c^2} \;\; Y = 1 - \frac{\vec{\nu}.\vec{\nu}}{c^2} \;\; Z = t - \frac{\vec{r}.\vec{\nu}}{c^2} \;\; \xi = \frac{Z^2}{XY}
$$

La classe des observateurs fondamentaux

Un ensemble de particules observateurs (galaxies) répondant
aux conditions suivantes :

1. ils se sont tous rencontrés au même moment, l'évènement originel
2. Ils forment les éléments d'un fluide. Sur une position $\vec{r}$, à l'instant t du référentiel spatio-temporel de chacun d'eux, il n'y a qu'une seule vitesse $\vec{\nu}$. Cette cinétique est contrôlée par l'équation de conservation de l'hydrodynamique)
3. ils partagent tous la même description mathématique de leur cinétique. ils ont :
   la même expression mathématique de la distribution des vitesses,
   la même expression mathématique de la densité spatiale

Peut-on trouver une cinétique
de cet ensemble d'observateurs fondamentaux,
descriptible mathématiquement de la même façon par ces observateurs ?
Réponse Oui !

1. Expression mathématique commune de la distribution des vitesses ($\sigma(\vec{\nu})dudvdw$)

$$\sigma(\vec{\nu}) = \frac{A}{c^3 Y^2}$$

2. Expression mathématique commune de la densité spatiale ($\rho(\vec{r})dxdydz$)

$$\rho(\vec{r} \mid t) = \frac{At}{c^3 X^2}$$

3. Expression mathématique commune du lien entre position et vitesse d'un élément du fluide à l'instant t

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}}{t}$$

Chaque particule observateur voit les autres s'éloigner de lui dans un mouvement uniforme, en droite ligne, avec une vitesse constante particulière à chacun d'eux

Nous avons donc deux modèles de cinétique

Un modèle dit hydrodynamique, celui de la cinétique des particules-observateurs (galaxies)
Un modèle dit statistique, celui de la cinétique des particules de matière
Ces deux modèles sont formellement superposables car :

1. Les observateurs voient leur propre cinétique mathématiquement de la même façon
2. Ils voient également la cinétique des particules de matière mathématiquement de la même façon

Mais expriment-ils une même réalité physique, à deux niveaux d'échelle ?
Autrement dit :
Le modèle statistique conduit-il à une agrégation des particules de matière en galaxies ?

La réponse est Oui !

Le modèle hydrodynamique est la version macroscopique du modèle statistique.

$$
\begin{aligned}
f(\vec{r},\vec{\nu} \mid t) &= \frac{\psi(\xi)}{c^6 X^{\frac{3}{2}} Y^{\frac{5}{2}}} \\
g(\vec{r},\vec{\nu} \mid t) &= [\vec{r} - \vec{\nu} t]\frac{Y}{X} G(\xi) \\
G(\xi) &= -1 - C[(\xi - 1)^{\frac{3}{2}} \psi(\xi)]^{-1}
\end{aligned}
$$

Au voisinage d'une particule-observateur, $\xi \approx 1$

Dans ce voisinage $G(\xi) \approx G(1)$ a une valeur finie, négative.

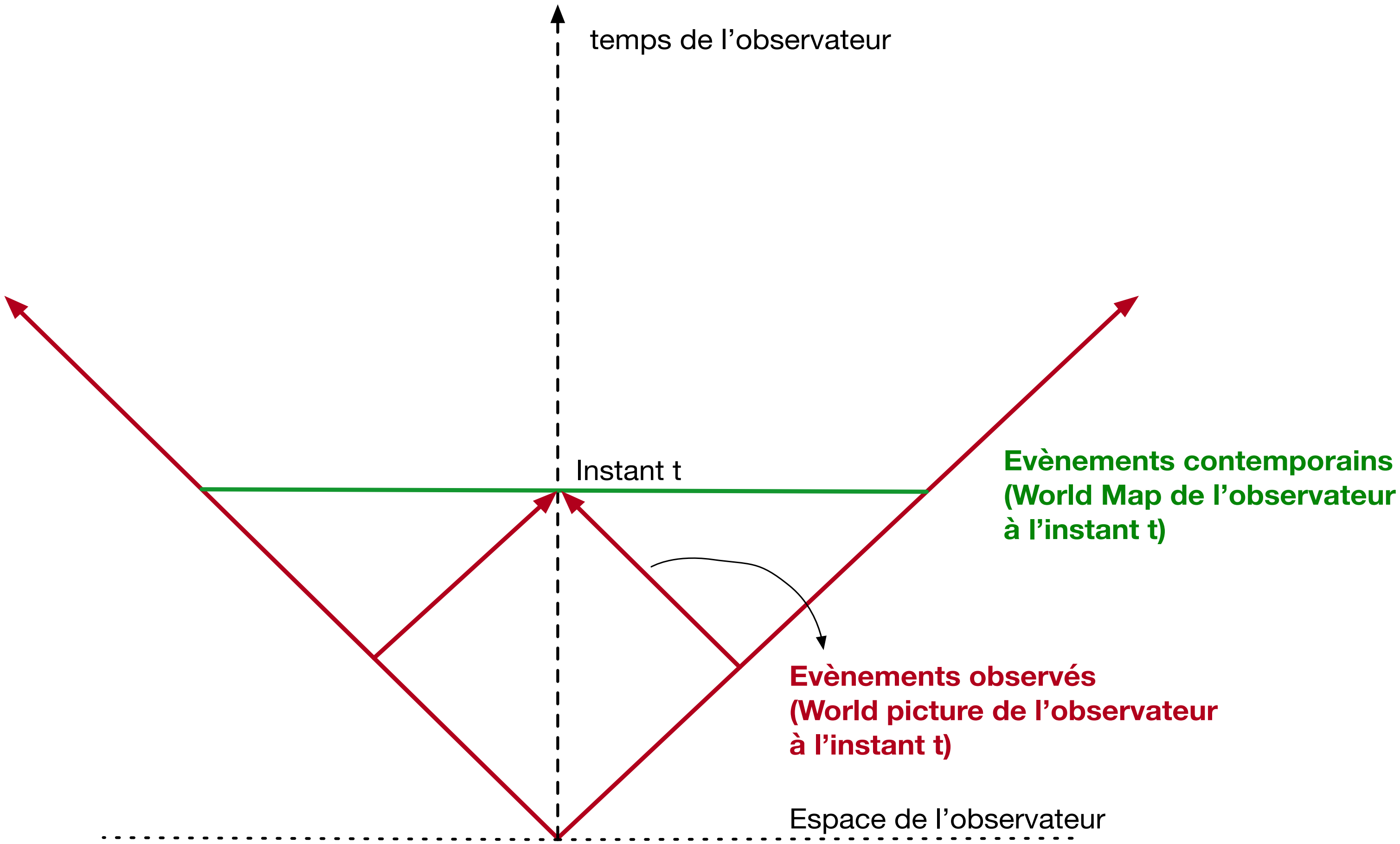
donc : $\psi(\xi) \to \infty$ lorsque $\xi \to 1$

En conséquence, dans ce voisinage

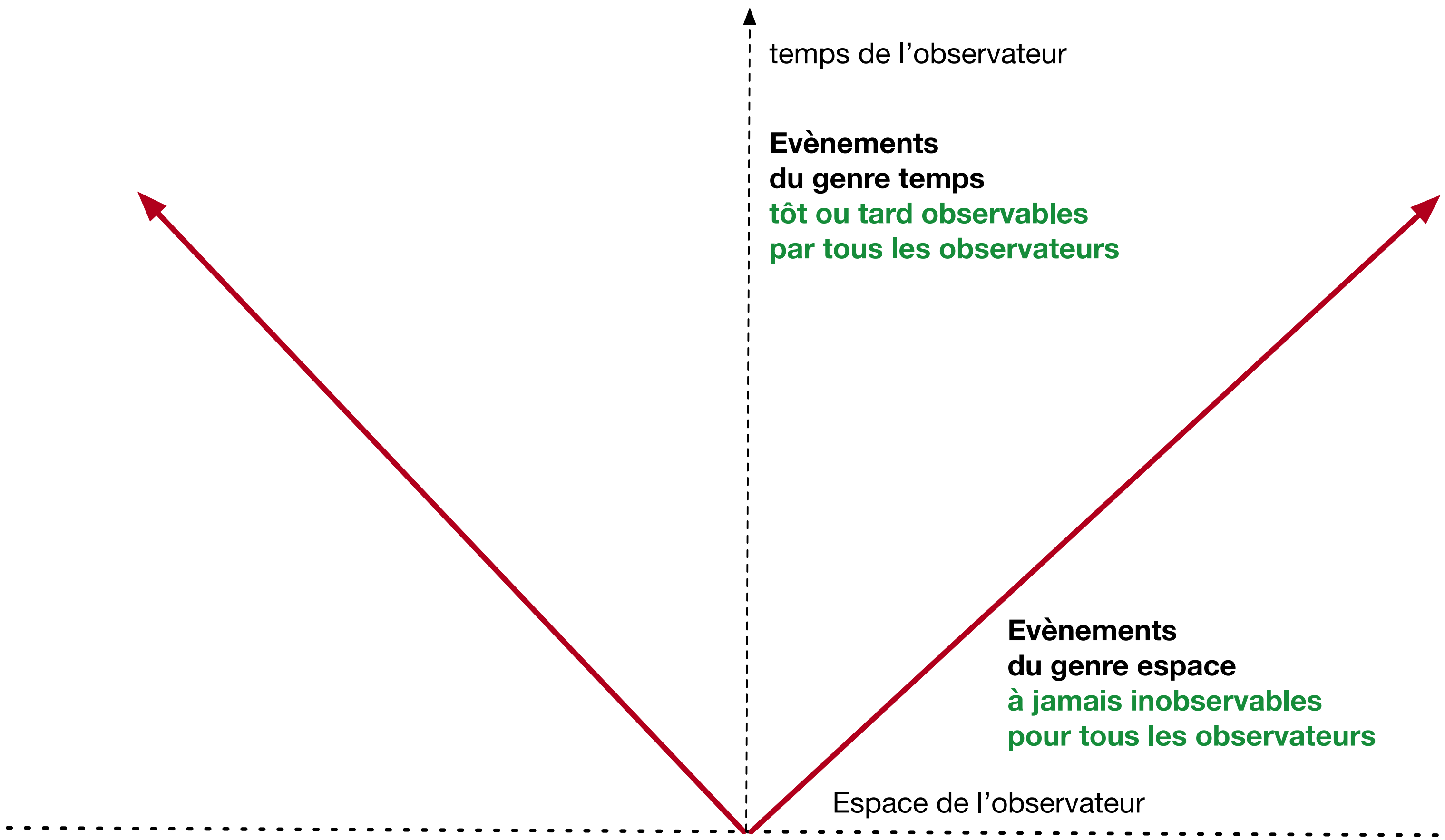
Les particules de matière ont une accélération faible ou nulle,

Leur densité est infinie ! !

Evènements contemporains et évènements observés.
World map ; World picture

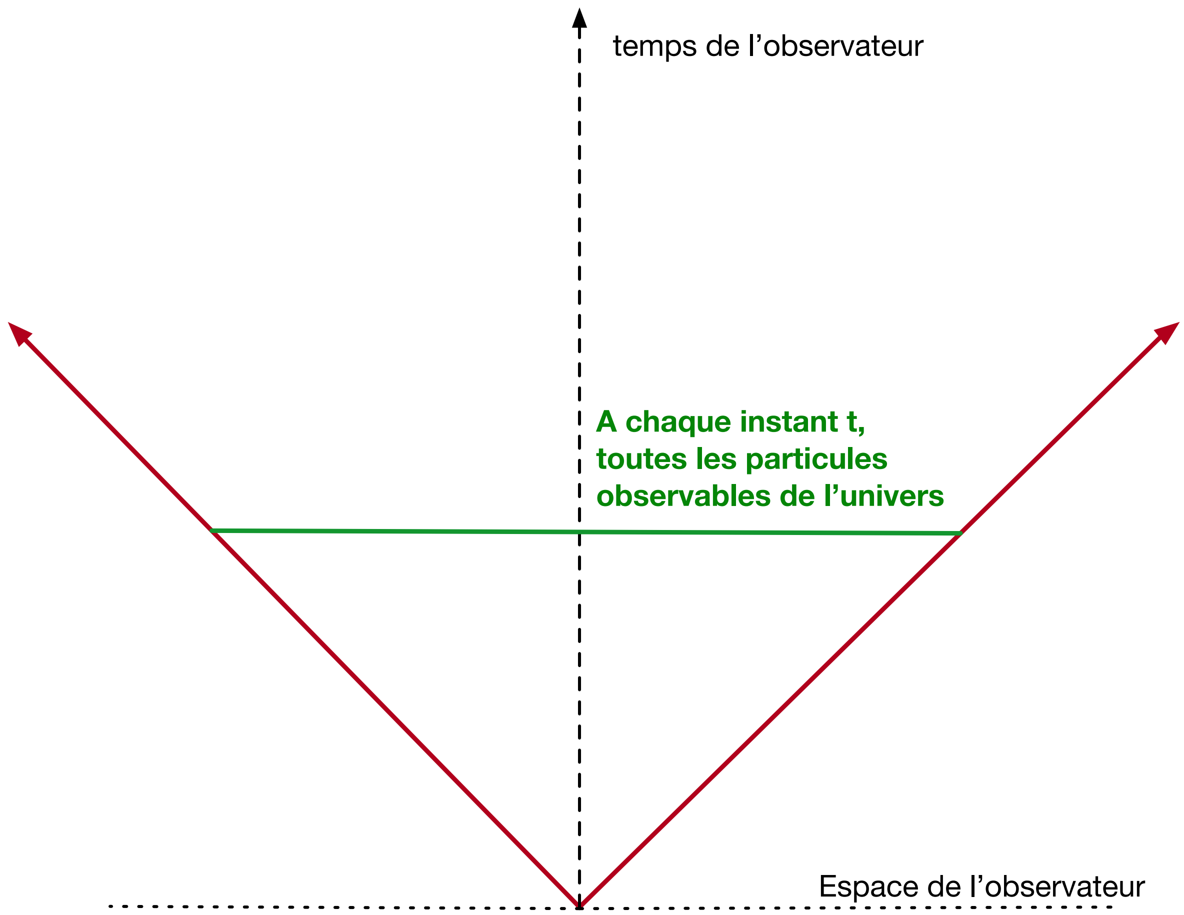


Evènements du genre temps et évènements du genre espace



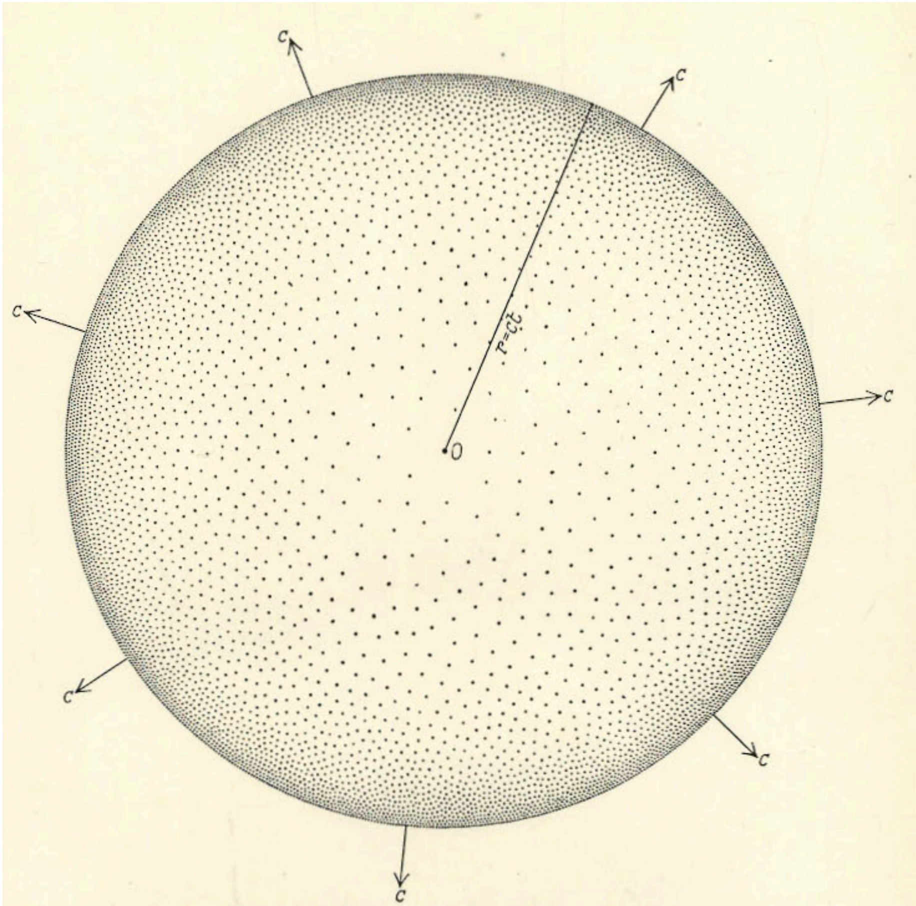
N'étant observables par aucun observateur, les évènements du genre espace sont considérés comme inexistants. (Seul existe ce qui peut être observé)
Sur le long terme, tous les observateurs, connaîtront les mêmes évènements.

Particules observables



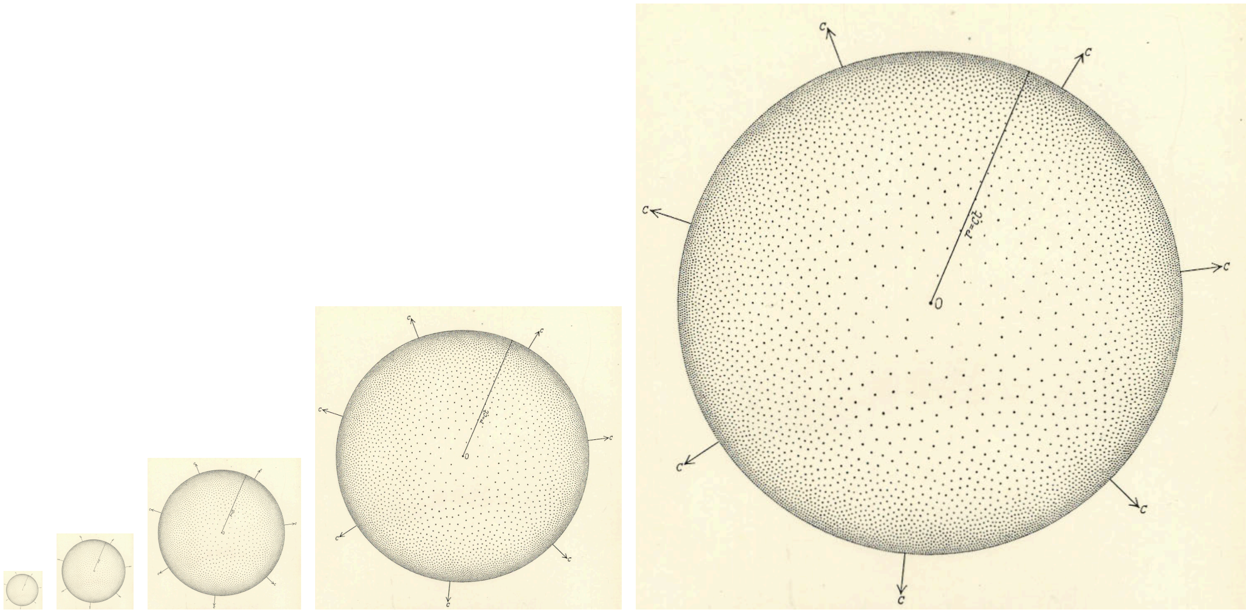
A chaque instant de son temps, la World map d’un observateur englobe toutes les particules de l’univers.
Toutes les particules de l’univers sont accessibles à tous les observateurs, et à tout instant.

Dans leurs World maps respectives (de même dans leurs World pictures)
Tous les observateurs voient autour d'eux,
un univers spatialement fini, comportant un nombre infini de galaxies
un univers dont ils sont le centre, isotrope, mais non homogène



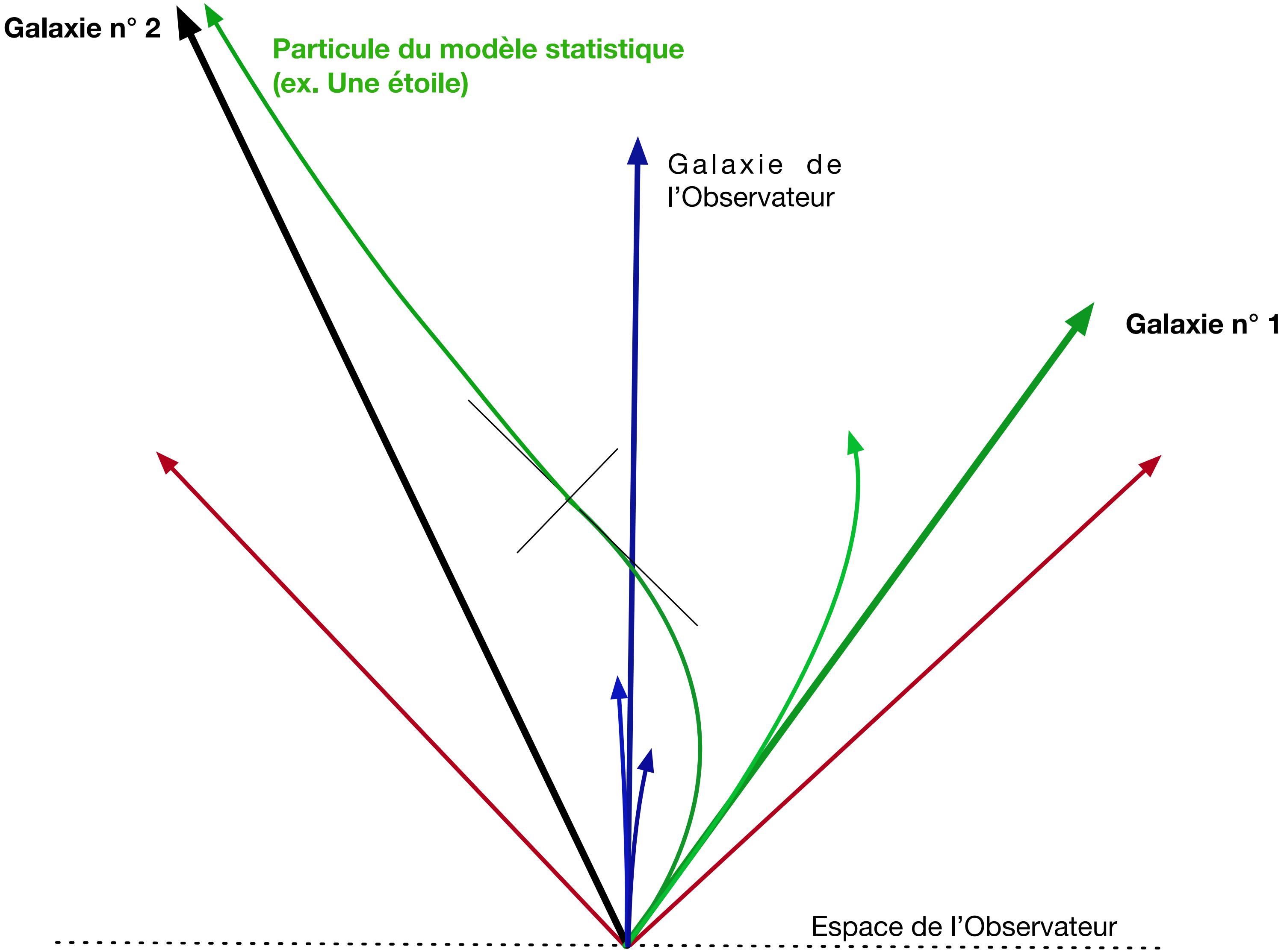
(Milne1935, plate 1)

Et dont la taille s'accroit à la vitesse de la lumière, linéairement avec le temps, depuis un évènement originel, la création ?



$$t = 0.5, 1, 2, 4, 8$$

Lignes d'univers des galaxies et des particules, Récession des galaxies, récession des étoiles



Le débat : des réactions immédiates

Malgré le ton polémique que Milne prend parfois, sa théorie est prise au sérieux :
En ces temps de "tensions" entre données d'observations
et modèles de cosmologie relativiste
la publication d'une théorie alternative ne pouvait qu'attirer l'attention.
Par ailleurs, cette théorie incitait à approfondir :

1. le statut, et le contenu du principe cosmologique.
2. les rapports entre l'espace et le temps, et la notion de temps cosmologique

et à bien séparer ce qui, dans la description du comportement de l'univers,

1. ce qui relevait de contraintes purement cinétiques,
   déduites du principe cosmologique
2. ce qui relevait de la physique, notamment d'une théorie de la gravitation

L’univers Milnien, un cas particulier d’un univers relativiste ?.

Une idée sous-tend plusieurs articles :
l’Univers Milnien est un (ou se rapproche d’un) cas particulier d’univers relativiste.
Mais nécessité d’apporter à cet énoncé certains correctifs :

1. La métrique "cachée" de l’espace-temps de Milne est bien, formellement, une métrique relativiste.
2. L’équation Milnienne du mouvement d’une particule élémentaire "ressemble" à l’équation relativiste correspondante.
3. Mais pas tout à fait : toutes lignes d’univers de particules en chute libre ne sont pas des géodésiques de cette métrique cachée sous-jacente

Les angles d'attaque

Deux approches sous-tendent plusieurs articles publiés dans les années 1933-1937

1. adopter la métrique cachée de Milne, y appliquer la relativité générale, et comparer les deux Univers

2. généraliser le raisonnement de Milne, en levant certaines restrictions (on aboutit à d'autres métriques)
   et analyser la compatibilité des cinétiques résultantes
   avec les théories de la gravitation
   (gravitation relativiste, gravitation newtonnnienne)

Un exemple de la première approche : Kermack et McCrea 1933

1. un temps commun à tous les observateurs !
   on retrouve le "temps cosmique"

$$\tau = \sqrt{X} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}}$$

2. les sections spatiales $\tau = cste$ ne sont plus euclidiennes,
   mais hyperboliques ! la métrique de l'espace-temps s'écrit

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - c^2 \tau^2 d\sigma^2$$

3. les galaxies occupent des positions spatiales fixes
   dans un univers en expansion
4. sur chaque section spatiale, la densité des galaxies est partout la même
5. mais elle n'est pas nulle,
   contrairement à ce qu'implique avec cette métrique la relativité générale

Un exemple de la seconde approche : Robertson 1935-1936

Robertson reprend les étapes du raisonnement
dans l'ordre présenté par Milne en 1935

1. Il fait sienne la définition d'observateurs équivalents sans la restreindre et aboutit, avec des variables adéquates, à une métrique conforme à celle des univers en expansion de la cosmologie relativiste

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - R^2(\tau) du^2$$

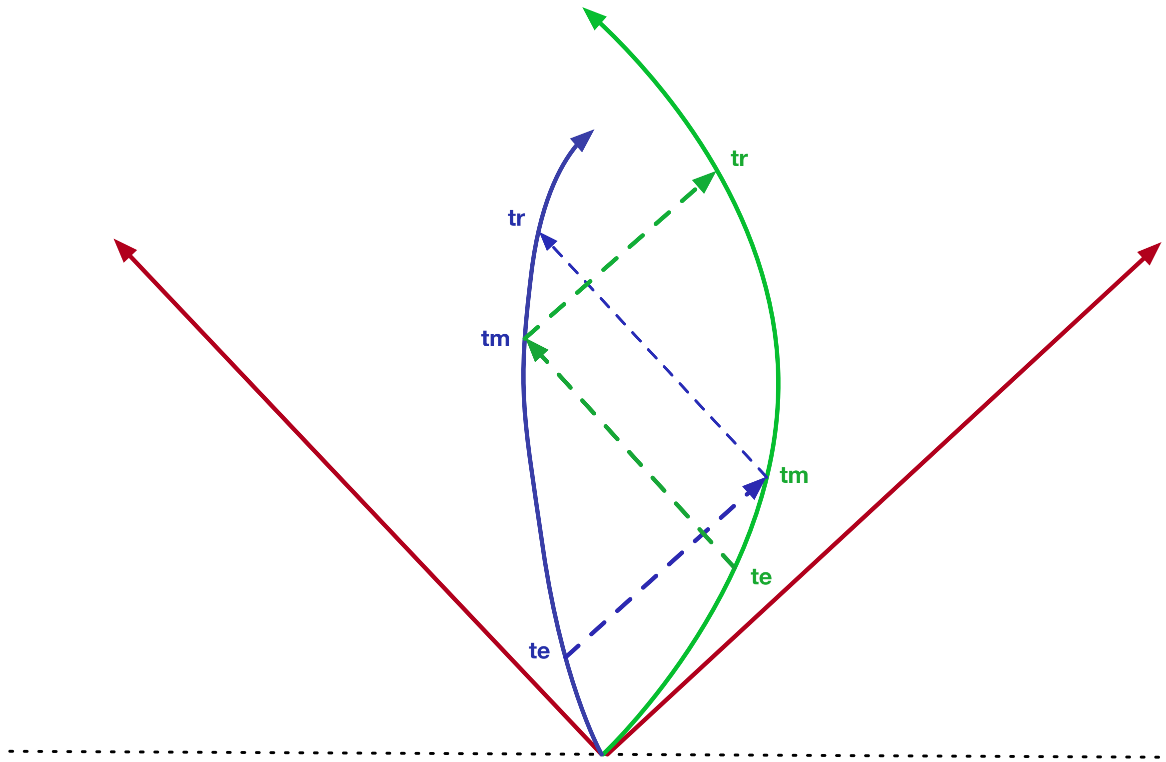
2. il détermine, avec cette métrique et en appliquant le principe cosmologique l'équation de mouvement d'une particule isolée puis des particules du modèle statistique

3. le degré de liberté laissé par ces équations est alors encore plus grand que celui des équations de Milne, et *font perdre tout espoir* de déduire une théorie de la gravitation à partir des seules contraintes cinématiques.
   Nécessité est de compléter par une théorie de la gravitation,
   au bout du compte, de faire de la physique

Pour conclure, Citons la conclusion de Robertson

In fine, we are inclined to believe that our investigations may in some mesure strengthen, on purely formal grounds the claims of the general relativity theory ; in any event, we maintain that it cannot be rejected on such grounds, and are the more content to rest the case with the empirical

Observateurs équivalents
Chaque observateur décrit le mouvement de l'autre de la même façon

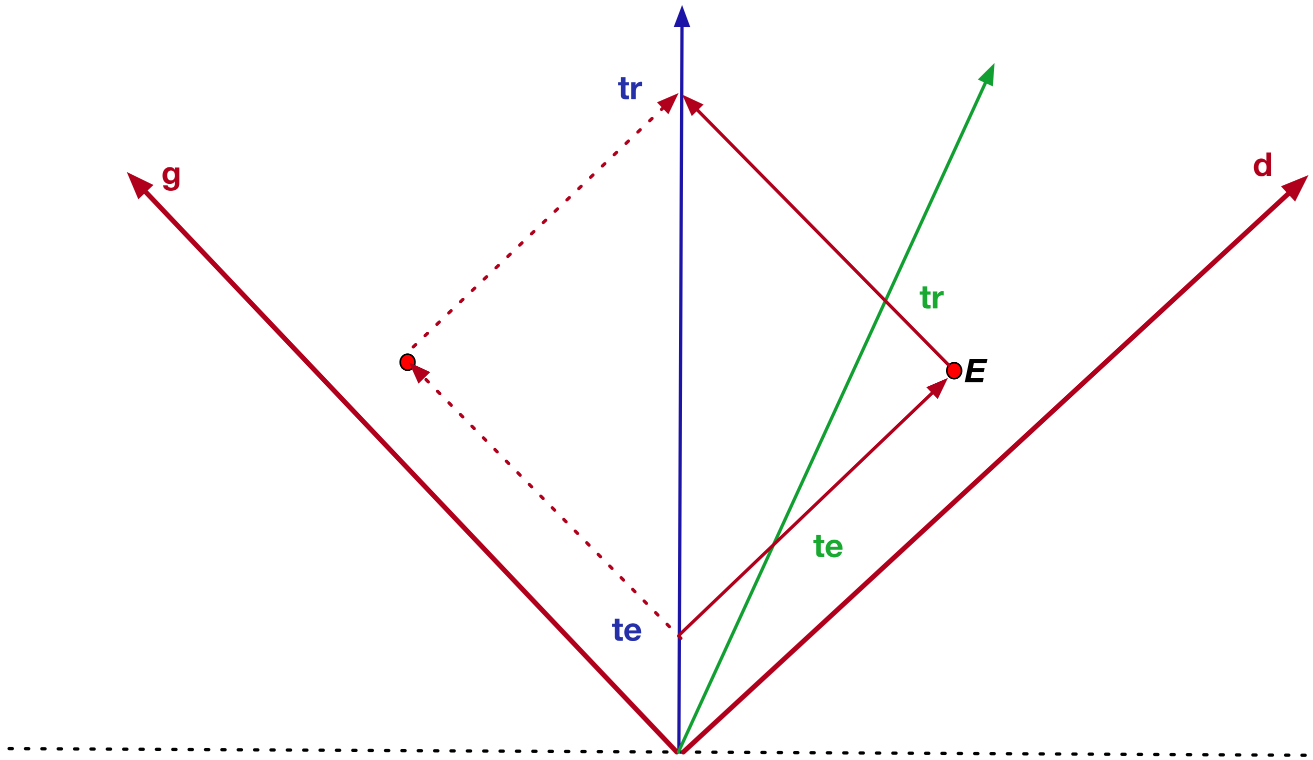


Fonction q : $te \to tr$: description par bleu du mouvement de vert
Fonction p : $tm \to tr$: correspondance entre l'horloge verte et l'horloge bleue
Fonction q : $te \to tr$: description par bleu du mouvement de vert
Fonction p : $tm \to tr$: correspondance entre l'horloge bleue et l'horloge verte
Les deux observateurs sont équivalents ssi $p \equiv p$, ce qui implique $q \equiv q$

Existe-t-il des observateurs équivalents ?

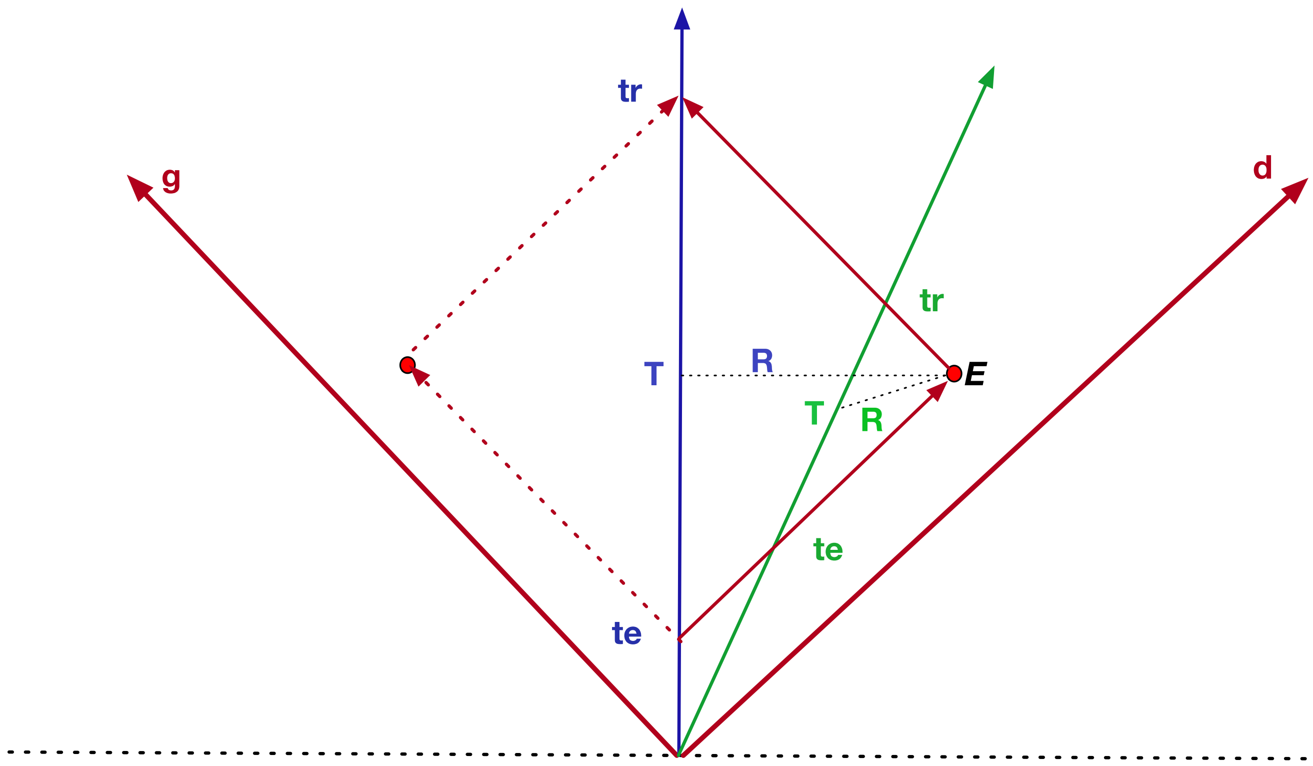
1. Deux observateurs en mouvement rectiligne uniforme et s'étant rencontrés sont équivalents
2. Un ensemble d'observateurs s'étant tous rencontrés au même moment, et se déplaçant en ligne droite à vitesse constante,
   sont équivalents deux à deux.
3. Dans ce cas, la relation d'équivalence au sens de Milne est bien
   une relation d'équivalence au sens mathématique ordinaire.
4. En trois dimensions spatiales, Milne n'est pas parvenu
   à trouver d'autres ensembles d'observateurs équivalents

Coordonnées d'un évènement (en une dimension spatiale)
avec pour seuls instruments de mesure : une horloge et un théodolite
L'horloge donne la date d'émission et la date de réception d'un signal,
le théodolite donne la direction spatiale du signal, en longitude ϕ et en latitude θ



Pour bleu coordonnées de ***E*** :$[te, tr, \phi, \theta]$
Pour vert coordonnées de ***E*** :$[te, td, \phi, \theta]$

Des coordonnées plus habituelles, séparant temps et espace :
Epoque et distance d'un évènement



époque de l'évènement : $T = \frac{1}{2}[tr + te]$ Distance de l'évènement : $R = \frac{1}{2}c[tr - te]$

Et l'on retrouve la relativité restreinte et les transformations de Lorentz

Pour deux observateurs en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, s'étant rencontrés et attribuant à l'évènement rencontre les coordonnées $te = 0, tr = 0$

Milne calcule le passage entre les coordonnées qu'ils donnent chacun à un même évènement. Ce en fonction de leur vitesse relative V

$$[te, tr, \phi, \theta] \Leftrightarrow [te, td, \phi, \theta] \qquad [T, R, \phi, \theta] \Leftrightarrow [T, R, \phi, \theta]$$

Il démontre que ce passage est régit par une transformation de Lorentz laissant les coordonnées de la rencontre invariantes. En particulier, nous aurons :

$$T^2 - \frac{R^2}{c^2} = T^2 - \frac{R^2}{c^2}$$

Un évènement contemporain de l'observateur bleu affectant directement l'observateur vert sera vu par ce dernier survenant dans son propre temps à une époque :

$$T = T\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}$$