Compléments

Autour de l'exposé de Jean Philippe Uzan
sur les effets de lentilles gravitationnelles

Jean Pierre Treuil, Janvier 2016
Je me suis beaucoup inspiré de l'ouvrage de Patrick Peter et Jean-Philippe Uzan
(Cosmologie Primordiale, Belin 2005)
auquel je fais référence à plusieurs reprises.
ainsi que de l'article de P. Fleury, J. Larena, J-P Uzan
The theory of stochastic cosmological lensing
paru au JCAP en 2015
Il s'agit d'un essai de compréhension de ma part concernant ces sujets difficiles
Mais j'ai pu faire des erreurs d'analyse,
et les propos et les calculs présentés dans ces compléments n'engagent que moi même

Enfin une remarque : ces compléments sont une tentative d'*explication de texte, formulée en langage en grande partie non mathématique,* de chapitres d'ouvrage ou d'articles dont le contenu se trouve principalement condensé dans un langage mathématique élaboré, celui des variétés différentielles, des tenseurs et de la Relativité générale. Nous pensons que ce type de transcription peut être utile - à titre d'introduction, pour tous ceux qui n'ont pas une grande habitude du langage mathématique évoqué. Les lecteurs en jugeront. Toute remarque sera la bienvenue.

Typologie des déformations dues au Weak Lensing
Matrice d'amplification, convergence, cisaillement

Il nous a semblé utile de reprendre de façon plus explicite, dans son principe, la description et le calcul des différents effets du *weak lensing,* présentés par Jean-Philippe Uzan dans la partie de son exposé qui leur est consacré.

Objectif : faire le lien entre

1. la forme réelle d'un objet céleste (une galaxie par exemple)
2. la forme angulaire perçue, la structure du faisceau de rayons lumineux reçu de cet objet par un observateur
3. la distribution de matière dans et autour du cône d'espace-temps matérialisé par le faisceau.

La littérature sur le sujet distingue, dans ce cadre général, plusieurs phénomènes :

1. effets consécutifs à l'interposition, entre la source et l'observateur, d'un objet considéré comme mince à l'échelle du trajet lumineux (régime des *lentilles minces*) ; objet pouvant être, par exemple, une galaxie, ou encore un amas de galaxies
2. effets consécutifs à la présence, tout le long du trajet lumineux, d'inhomogénéités à grande échelle du champ gravitationnel (impact des grandes structures traversées)

La physique et les formalismes mathématiques sont à la base les mêmes dans ces deux contextes, mais c'est sur le second que Jean-Philippe Uzan nous semble avoir centré son exposé.

La matrice d'amplification

Soit un rayon lumineux reçu par un observateur, en provenance d'une source lointaine ponctuelle. Cet observateur recoit cette source sur une position angulaire θi , alors qu'il la recevrait, si aucun effet "weak lensing" n'avait lieu, sur une position angulaire θs, sa "vraie" position en somme[1]. Lorsque l'effet de lentille gravitationnelle est suffisamment faible, on admettra qu'il n'y a pas dédoublement de la source, et qu'en conséquence, θs est une fonction de θi , fonction dépendante de la distribution du champ gravitationnel, laquelle fixe également la *géodésique nulle* - la trajectoire effective du rayon lumineux - reliant la source et l'observateur.

On trouve dans la littérature diverses formulations de cette fonction, dans diverses hypothèses : présence d'une "lentille (gravitationnelle) mince" s'interposant entre la source et l'observateur, ou au contraire distribution plus ou moins continue de matière. Ce qui nous intéresse ici, c'est la forme différentielle de la fonction $\theta s\ [\ \theta i\ ]$, contrôlant donc l'influence d'une petite variation $d\theta i$ (autour de θi) sur la variation $d\theta s$ autour de θs . La sphère céleste, sur laquelle s'inscrivent les positions angulaires est une variété à deux dimensions : la forme différentielle liant les deux *vecteurs* angulaires $d\theta s$ et $d\theta i$ s'écrit $d\theta s$ **=** $A\ [\ \theta i\ ]\ d\theta i$, *A* étant une matrice 2 x 2 , la "jacobienne" de la fonction.

Cette matrice est appelée *matrice d'amplification*. Elle est définie sur toute position de la sphère céleste ; elle définit ainsi une sorte de champ de déformations. Mais elle ne saurait dépendre que du seul paramètre de position angulaire θi . Elle dépend également de la position de la source sur la géodésique, identifiée par la valeur Xs d'un certain paramètre ici noté X[2]. L'impact du même $d\theta i$ sur $d\theta s$ différera en effet selon que la source est relativement proche de l'observateur, avec un effet de champ gravitationnel limité, ou au contraire très éloignée. On doit donc écrire $A\ [\theta i,\ Xs]$: il existe une infinité de matrices A sur un même trajet lumineux potentiel convergeant sur l'observateur en θi depuis la limite de l'univers observable ; ces matrices étant paramétrées par les différentes positions possibles Xs de la source depuis $Xs = 0$ jusqu'à la valeur correspondant à cette limite d'observation.

---

[1] La mobilisation de cette "vraie" position angulaire pose problème ; seule en effet existe vraiment $\theta i,$ la position *observée* dans l'univers réel, celui où le weak lensing agit. La position θs est une position qui n'existe que dans un univers *fictif* dépourvu de weak lensing ; sa détermination comporte donc une part d'arbitraire, dont on peut penser à priori qu'il disparait dans la prise en compte des seules variations et de la relation $d\theta s\ d\theta i.$ Nous allons revenir sur ce point avec l'équation de Sachs.

[2] Pour des raisons liées aux limites de la gestion des indices et exposants sur Google docs. Dans l'exposé de Jean-Philippe Uzan, X est noté λ ou $v.$ A noter que le choix de la paramétrisation de la géodésique, pour en repérer chaque position, n'est pas complètement arbitraire. Elle doit répondre à certaines conditions, liées à la géométrie de l'espace-temps sur sa trajectoire, qui la détermine comme *paramétrisation affine.* Ces conditions étant remplies, il subsiste encore des degrés de liberté : si $X(p)$ est ainsi une paramétrisation affine de chaque position p de la géodésique, $A\ X(p)\ +B$ en sera également une. le choix d'une paramétrisation affine donne une signification physique directe aux dérivées de certaines grandeurs par rapport à la valeur du paramètre , par exemple l'impulsion.

Convergence et cisaillement

Un raisonnement simple permet de scinder la matrice d'amplification en une somme de trois composantes, dont on peut respectivement visualiser l'impact sur un faisceau de rayons lumineux qui serait, si il n'y avait ni déplacement ni déformation, un cône circulaire de géodésiques autour de la géodésique centrale θi (géodésiques partant de sources disposées autour d'un petit cercle)

1. première composante : la matrice identité, signifiant l'absence de déformation ; si seule présente : $d\theta s = d\theta i$
2. deuxième composante : dite de convergence. Signifiant un élargissement isotrope du faisceau ; lorsqu'elle entre en jeu en affectant la première, la relation $d\theta s\ d\theta i$ devient $d\theta s = [1- \varkappa(\theta i, Xs)]d\theta i$.
3. troisième composante dite de cisaillement, transformant le cercle des sources en une ellipse plus ou moins allongée ; cette composante est donc paramétrée par deux valeurs, une valeur d'excentricité γ - étirement de facteur $(1/1\text{-}\gamma)$ et compression de facteur $(1/1+\gamma)$ sur l'axe perpendiculaire - et un angle de rotation, fixant l'orientation de ces axes et ne pouvant être déterminé par l'observation.

Cette décomposition nous intéresse car elle est en lien avec les éléments observables du champ de déformations. Nous y reviendrons mais il faut d'abord évoquer le principe du calcul des matrices $A[\theta i, Xs]$ dans leur dépendance avec le champ gravitationnel, dans le cadre de la Relativité générale. Plus précisément, pour un même θi, le calcul de la manière dont elles varient avec le paramètre de position de la source Xs

L'équation de Sachs.

Le but est maintenant de trouver une équation différentielle exprimant les variations de la matrice d'amplification $A[\theta i, Xs]$ relativement à Xs, en fonction de la structure géométrique locale (exprimée dans un tenseur de courbure). On ouvre ainsi la voie au calcul effectif de cette matrice, sous différentes hypothèses sur l'espace-temps.

Mais, comme annoncé dans la note précédente, la mobilisation des positions fictives θs et de leurs variations pose question, car il n'existe qu'un seul univers, celui observé. Pour éviter cette question et opérer proprement, on se place dans un premier temps sur la relation existant, *dans l'univers réel*, entre une variation $d\theta i$ autour de la géodésique référente[3] θi et les écarts qui en résultent entre les deux trajets lumineux θi et $\theta i + d\theta i$ en différents points de leur parcours. Cette relation est encodée, sur chaque position X de la référence, par une *matrice de déformation*. Nous examinerons dans un second temps les relations entre ces matrices et les matrices d'amplification.

L'équation de déviation géodésique

Le point de départ est une équation appelée *équation de déviation géodésique*. Cette équation caractérise une propriété géométrique des variétés différentielles métriques ; elle

[3] considérée comme la “ligne de visée” de l'observateur.

n'est donc pas propre à la Relativité Générale, mais nous la présentons cependant ici dans cette perspective.

Soit donc à nouveau un rayon lumineux reçu par un observateur. La position angulaire de réception est toujours notée θi. Ce rayon matérialise une *géodésique nulle* de l'espace-temps, prise comme *géodésique de référence.* Soit ensuite une seconde géodésique nulle convergeant également sur l'observateur, en $\theta i+d\theta i$. Cette seconde géodésique est choisie très proche de la première, si bien qu'en chaque point p de la référence, il n'existe jamais qu'un petit écart ξ entre les deux géodésiques. Cet écart peut être mesuré, par exemple, orthogonalement au vecteur k[4] tangent en p à la référence. Après choix d'un référentiel d'espace temps, p, k et ξ sont chacun représentés par quatre composantes indicées par une lettre grecque, par exemple $\mu \in [0,1,2,3]$.

Le long de la référence, les positions p sont repérées par la valeur du paramètre affine X. Ce paramètre varie continuement en remontant vers le passé à partir de $X=0$ sur la position de l'observateur. La géométrie de l'espace temps - comme d'ailleurs de toute variété différentielle structurée par des géodésiques - donne alors l'équation contrôlant l'évolution de l'écart ξ en fonction de X. C'est en fait un système d'équations différentielles homogènes du second ordre (dérivation sur X) qui, avec les concepts et conventions employés dans ces mathématiques (dérivation covariante, notations tensorielles, conventions d'Einstein …) s'écrit[5] :

$$\frac{D^2}{dX^2}\xi^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}k^{\nu}k^{\alpha}\xi^{\beta}$$

Dans ce système de 4 équations[6] interviennent les composantes du vecteur tangent k pris sur la position $p(X)$ ainsi que les composantes d'un tenseur $\mathbf{R}$, le *tenseur de Riemann.* Ce tenseur, autrement appelé *tenseur de courbure*, dépend de la manière dont la métrique de l'espace-temps varie d'une position à l'autre. Compte tenu des symétries existantes, il ne possède que vingt composantes indépendantes. L'équation donne en somme l'accélération (dans le sens d'une amplitude croissante ou décroissante) du vecteur ξ lorsque augmente la coordonnée radiale X, et donc lorsque augmente la distance entre l'observateur et le point $p(X)$ sur la géodésique de référence.

Des écarts ξ aux écarts angulaires $d\theta i$

Les calculs commencent par définir précisément la manière dont sont mesurés les écarts ξ , en spécifiant les composantes de ces écarts dans des systèmes locaux de coordonnées d'espace-temps autour de chaque point p. Pour ces systèmes locaux, un choix naturel

---

[4] si la paramétrisation X est bien affine, ce vecteur k est à un coefficient près le vecteur d'onde de l'onde électromagnétique, lequel détermien la fréquence de cette onde sur la position considérée.

[5] cf l'exposé de notre conférencier, et aussi Patrick Peter, Jean-Philippe Uzan, in *Cosmologie Primordiale*, Belin 2005, chapitre 7, eq 7.65. Le symbole D de dérivation est la dérivarion covariante appliquée le long de la géodésique. Ne pas le confondre avec celui de la matrice D

[6] avec μ, ν, α, β, prenant chacune indépendamment les valeurs 0,1,2,3, et sommation sur les indices ν, α, β (conventions d'Einstein)

s'impose. On commence par définir un repère local au niveau de l'observateur (c.a.d. en $X=0$), en prenant pour base quatre vecteurs : le vecteur tangent k à la géodésique de référence, le vecteur tangent u à la propre ligne d'univers de l'observateur, et enfin deux vecteurs orthogonaux *à la fois*[7] à k et à u, soit η_1 et η_2. Puis on "transporte parallèlement" cette base de quatre vecteurs en chaque point p de la géodésique de référence, les vecteurs η_1 et η_2 transportés restant alors orthogonaux au vecteur k local. Les écarts ξ sont alors assimilés aux vecteurs séparant les deux géodésiques dans les plans $[\eta_1, \eta_2]$; ils sont donc des combinaisons linéaires, en chaque point p, des seuls vecteurs η_1 et η_2 et sont donc bien eux même orthogonaux à k : $\xi = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$. On est alors amené à raisonner et écrire les équations en fonction de ces seules composantes, vues comme des composantes d'un vecteur, cette fois ci à deux dimensions, vecteur noté ici ξ^*.

Pour l'observateur, le plan local $[\eta_1, \eta_2]$, donc en $X=0$, est "purement spatial". C'est son "écran", le plan perpendiculaire à la ligne de visée, sur lequel il mesure l'écart angulaire $d\theta i$ séparant les deux géodésiques. Examinons quelles sont les relations entre la fonction $\xi^*(X)$ et $d\theta i$.

Au niveau de l'observateur, l'écart ξ^* est par définition nul. La différence entre les deux géodésiques se résume simplement à l'écart angulaire $d\theta i$. Des considérations simples (linéarité de l'équation géodésique) font poser qu'au premier ordre l'écart ξ^* en un point $p(X)$ quelconque est proportionnel à $d\theta i$. On peut donc écrire $\xi^*(X) = D(X)\ d\theta i$, ou D est une matrice 2x2 appelée *matrice de déformation*.

La matrice[8] D, pour chaque valeur du paramètre affine X, permet de passer, *dans l'univers réel*, de la structure observée d'un faisceau lumineux centré sur la position angulaire θi à la structure géométrique[9] de la "section" de ce faisceau prise en X. En particulier, le déterminant de cette matrice sera égal au rapport entre l'*aire* $S(X)$ de ladite section, et la valeur $d\Omega i$ de l'angle solide formé par le faisceau en son point de convergence sur l'observateur. Comme conséquence de la définition de la distance angulaire[10] séparant la section de l'observateur, nous avons alors :

$$\det\left[D(X)\right] = \frac{S(X)}{d\Omega_i} = D_A^2(X)$$

Le déterminant de la matrice $D(X)$ est égal au carré de la distance angulaire entre l'observateur et la position $p(X)$, laquelle dépend donc de l'intensité du weak lensing dans et au voisinage du faisceau. Il s'agit là d'un point qui a son importance dans la détermination de la relation entre redshift et distance.

---

[7] L'espace temps a quatre dimensions. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à deux vecteurs indépendants (ici au sens de la métrique structurant cet espace temps) a bien deux dimensions et non une seule comme dans l'espace à trois dimensions.

[8] Laquelle dépend de la géodésique de référence en jeu et donc de son identifiant θi, et il faudrait écrire de façon plus précise $D(\theta i, X)$.

[9] supposées ici exprimées en coordonnées co-mobiles.

[10] ou plutôt la *comoving angular diameter distance*, curieusement nommée dans Cosmologie primordiale (Belin 2005, page 158) "diamètre angulaire co-mobile". Dans ce texte, nous avons considéré spontanément les coordonnées x et ξ comme des coordonnées et des vecteurs co-mobiles.

Enfin, de l'équation géodésique à celle sur la matrice de déformation.

Le lien rattachant la matrice $D(X)$ aux écarts $\xi^*(X)$ et $\xi(X)$ étant établi, on conçoit que l'équation contrôlant sa dynamique le long de la géodésique de référence puisse être écrite sans difficulté. La première étape consiste à passer - par projection - de l'équation géodésique (sur ξ) à une équation de même nature sur ξ^* puis de cette dernière à celle de D. Jean-Philippe Uzan nous donne l'écriture tensorielle de cette équation, appelée *équation de Sachs*. C'est encore un système linéaire de deux équations différentielles du second ordre, homogène, système que l'on peut écrire de façon simplifiée

$$\frac{d^2}{dX^2} D = RD$$

où R , appelée matrice optique, est une expression tensorielle faisant intervenir le tenseur de courbure sur la position $p(X)$, et les vecteurs k , η_1 et η_2 pris sur la même position.

Des hypothèses sur la distribution de matière et d'énergie dans l'espace temps, et donc *in fine* sur sa métrique et sur le champ du tenseur de courbure, pourront conduire au calcul du champ de déformations. On peut alors envisager de confronter le résultat de ce calcul à certains observables, ou du moins en vérifier la compatibilité. C'est ce que Jean-Philippe Uzan nous a montré sur quelques exemples.

De la matrice de déformation à la matrice d'amplification.

La matrice d'amplification $A(Xs)$ a été introduite comme la jacobienne reliant un écart angulaire fictif $d\theta s$ avec un écart angulaire réellement observé $d\theta i$. La relation entre $A(Xs)$ et la matrice D prise en $X{=}Xs$ dépend donc de la définition du $d\theta s$, en lien avec l'écart "en distance" ξ^* lui aussi pris en $X{=}Xs$.

Une définition "naturelle" de cet écart angulaire $d\theta s$ consiste à le prendre égal au rapport entre $\xi^*(Xs)$ et une distance angulaire calculée pour "une position équivalente" dans un univers fictif dans lequel le weak-lensing serait absent, mais qui aurait les mêmes paramètres globaux de structure et d'expansion[11]. La relation entre les deux matrices $A(Xs)$ et $D(Xs)$ s'écrit dans ces conditions :

$$A\left(Xs\right) \equiv \frac{D\left(Xs\right)}{\bar{D}_A\left(Xs\right)} = \frac{D_A\left(Xs\right)}{\bar{D}_A\left(Xs\right)}\frac{D\left(Xs\right)}{D_A\left(Xs\right)}$$

[11] cette définition suppose donc d'être à même de relier une position de l'univers réel à une position de l'univers fictif non perturbé ; admettons ici cette correspondance réalisée, tout en soulignant qu'il s'agit là d'une question non triviale ; la solution la plus naturelle est de passer par l'intermédiaire du redshift z : la connaissance de la géodésique réelle détermine en effet la fonction $z(X)$. La position fictive associée à la position réelle $p(X)$ est alors celle assurant dans l'univers non perturbé le même redshift. Nous essayerons de revenir plus loin dans notre analyse de l'article de Fleury et al. 2015

où D_A surmonté d'une barre désigne cette distance angulaire dans l'univers non perturbé. La matrice d'amplification encode donc le rapport entre distance angulaire réelle et distance angulaire fictive. En particulier, le déterminant de A est le carré de ce rapport[12] :

$$\det\left[A\,(Xs)\right]=\left[\frac{D_A\,(Xs)}{\bar{D}_A\,(Xs)}\right]^2$$

L'expression de la matrice d'amplification en fonction de la convergence $\varkappa$ et du cisaillement γ permet, lorsqu'on néglige le cisaillement, de relier ce rapport de distances - le taux de contraction des distances angulaires dû au weak-lensing - avec la convergence[13] :

$$\aleph\,(Xs)=\frac{\bar{D}_A\,(Xs)-D_A\,(Xs)}{\bar{D}_A\,(Xs)}$$

Résoudre l'équation de Sachs : deux cas de figures

En toute rigueur, le calcul de la matrice $D(\theta i, Xs)$ et donc de l'amplification $A(\theta i, Xs)$, avec θi, Xs *donnés*, s'effectue par l'intégration de l'équation de Sachs sur la géodésique θi *effectivement empruntée par les photons* jusqu'à l'observateur. Donc en connaissant les valeurs de la matrice optique R *le long de cette géodésique,* depuis $X=0$ jusqu'à $X = Xs$. Mais cette géodésique, de même que les valeurs de R, dépendent du champ tensoriel métrique[14] effectivement présent sur l'espace-temps. Elles sont donc inconnues en l'absence d'hypothèses sur la structure de ce champ. On conçoit donc que les calculs ne peuvent être menés que sur la base de telles hypothèses, et en admettant certaines approximations. Jean-Philippe Uzan a structuré son exposé en considérant successivement deux cas.

1. la prise en compte de petites perturbations de la métrique de l'espace-temps s'imposant sur un espace temps “de Friedmann-Lemaître” donc homogène et isotrope. Perturbations se traduisant physiquement par des champs *continus* de variations de densité et de pressions se sur-imposant aux champs uniformes de l'univers homogène
2. la prise en compte d'hétérogénéités *discontinues*, en modélisant les distributions de matières sous forme de distributions de *grains*, plus ou moins resserrés, dont on se donne la loi de répartition.

---

[12] puisque, par définition de la distance angulaire réelle, le déterminant de la matrice $D(Xs)$ divisée par cette distance vaut 1.

[13] L'article de Fleury et al, The theory of stochastic cosmological lensing, 2015, dans son annexe de sa version arXiv, page 42 formule A29, ne comporterait-il pas une erreur : lorsque la convergence est positive, la distance angulaire observée dans l'univers réel ne doit elle pas être inférieure à la distance fictive ?

[14] rappelons qu'en chaque point (de l'espace-temps), le tenseur métrique détermine la manière de calculer l'élément infinitésimal de longueur (généralisée) ds valable en ce point. Tous les autres champs tensoriels géométriques, et notamment le champ des tenseurs de courbure, et *in fine* celui des matrices optiques dérivent du champ métrique

Cas d’un espace de Friedmann Lemaître faiblement perturbé : quelques points à connaitre.

La compréhension de la résolution de l’équation de Sachs dans ce contexte appelle une connaissance minimale de la manière dont sont modélisées en Relativité Générale, sous le vocable de perturbations, les écarts à un univers homogène - écarts sur la métrique et sur la répartition du contenu matériel : considérations de différents types ou *modes* de perturbations (*perturbations scalaires, vectorielles et tensorielles*), *choix de jauges,* recherche, dans la caractérisation des perturbations, de grandeurs indépendantes de ces choix, savoir des grandeurs *invariantes de jauge*. Il ne saurait être question ici d’entrer dans les formalismes, mais il nous a paru utile cependant d’introduire brièvement quelques explications. Nous abordons d’abord la géométrie, puis nous passerons au contenu matériel.

Jauges et quantités invariantes de jauge

La métrique en chaque point de l’espace-temps étant un tenseur, une perturbation du champ est à priori également du même type tensoriel. On s’attend à ce que cette perturbation affecte les composantes (de la métrique) relatives à la dimension temporelle, comme celles relatives aux dimensions purement spatiales, et qu’elle introduise éventuellement un couplage entre ces quatre dimensions. Mais elle n’a pas nécessairement cette complexité, et peut être simplement vectorielle, ou même scalaire. D’une façon générale, on montre que l’écriture d’une perturbation[15] de la métrique de Friedmann-Lemaître, *une fois choisi un système de coordonnées,* se caractérise par la donnée en chaque point de quatre valeurs scalaires, des composantes de deux vecteurs et de celles d’un tenseur, et comporte donc[16] 10 degrés de liberté.

Mais on est libre de choisir le système de coordonnées, c’est ce qu’on appelle une liberté de jauge. Lorsque l’on effectue un changement de coordonnées, les valeurs et composantes de ces termes perturbatifs ou *variables de perturbations* sont modifiées, notamment pour maintenir inchangée la valeur de l’élément métrique élémentaire *ds^2.* Or, sous sa forme la plus générale, le choix d’un nouveau système de coordonnées met en oeuvre 4 degrés de liberté. Les “vraies” perturbations de l’espace-temps, celles qui ne peuvent être annulées par un changement de coordonnées, se résument donc à 10 - 4 = 6 degrés de liberté[17].

Certaines combinaisons des variables de perturbation peuvent s’avérer indépendantes du système de coordonnées. Ces combinaisons définissent des quantités (à une ou plusieurs

---

[15] La métrique de Friedmann-Lemaître est classiquement donnée par l’expression de l’élément de (pseudo) longueur infinitésimale *ds* , ou plutôt de son carré *ds^2*. La métrique perturbée est obtenue en modifiant cette expression initiale par incorporation de certains termes scalaires, vectoriels et tensoriels.
[16] Cf Cosmologie générale, Belin 2005, page 242. Le décompte des degrés de liberté intègre le fait que les deux vecteurs et le tenseur en question sont spatiaux (donc sur trois dimensions), que leurs divergences sont nulles, et enfin qu’il s’agit d’un tenseur symétrique. Rappelons qu’un degré de liberté correspond, une fois le système de coordonnées fixé, au choix d’une *fonction* appliquant l’espace-temps ainsi répéré dans l’ensemble des réels ***R*.** Ce nombre (10) est bien celui des degrés de liberté à l’oeuvre dans la métrique de l’espace-temps, métrique qui est un champ de tenseurs symétriques à 10 composantes indépendantes.
[17] Cf Cosmologie générale, Belin 2005, page 244.

dimensions) dont les valeurs sont les mêmes dans tout système de coordonnées. Elles sont dites pour cette raison *invariantes de jauge*. Possèdent ainsi cette qualité deux champs habituellement notés Φ et Ψ qui font référence au champ gravitationnel. Leur nature purement géométrique (dans un système de coordonnées quelconque, une certaine combinaison des variables de perturbation métrique) rappelle bien la thèse de la Relativité générale, à savoir ramener la gravitation à la géométrie de l'espace-temps.

Choix de jauge

Choisir une jauge, c'est jouer sur les degrés de liberté, en imposant des contraintes, ici sur les variables de perturbation, jusqu'à ce que la jauge soit "fixée", c'est à dire, dans le cas présent, après avoir exploité quatre degrés de liberté[18]. De telles contraintes consistent, par exemple, à ce que certaines des variables soient nulles. La liste des variables restant "libres" totalisera donc six degrés de liberté. Différents types de contraintes conduisent à différentes jauges, et donc différentes expressions des invariantes de jauge[19].

Modélisation du contenu matériel

Il est également utile de comprendre la manière dont il faut s'imaginer le contenu des univers (non perturbés ou perturbés) sous-tendus dans les calculs effectués - à savoir des univers en expansion remplis d'un "fluide" se rapprochant d'un gaz plus ou moins parfait -.

Dans l'univers (homogène et isotrope) non-perturbé, ce fluide se répartit sur chaque section spatiale de l'espace-temps selon une distribution uniforme (en densité, en pression,...). Dans l'univers perturbé prennent place - à certaines échelles - des hétérogénéités et anisotropies représentées par différents champs : écarts (par rapport à la valeur uniforme) de densité et de pression, éventuelles anisotropies de pression, courants déplacant les éléments de fluide, etc.

On sait qu'en Relativité Générale, contenu matériel et géométrie sont liés par l'équation d'Einstein. On s'attend donc à ce que les écarts et variations affectant le contenu matériel de l'univers perturbé (affectant les distributions de densité, de pression, …), soient liées aux perturbations de la métrique. Ce lien entre perturbations de contenu et perturbations métriques prend une forme simple : il établi un rapport de proportionnalité entre :

1. les écarts affectant le tenseur d'énergie-impulsion (contenu matériel). Dans les composantes de ces écarts, on trouve les "contrastes" de densité et de pression, les valeurs de densité et de pression de l'univers non perturbé initial. Mais figurent aussi certaines composantes de la métrique non perturbée, et enfin les variables de perturbations métriques.

[18] ceux dont l'origine est la liberté de choix d'un système de coordonnées.
[19] dans certaines jauges par exemple, l'expression de Φ (ou de Ψ) se réduira *à une seule* des variables de perturbation ; cette expression sera donc particulièrement simple, et facilitera l'interprétation de la grandeur concernée.

2. les écarts affectant le tenseur d'Einstein (géométrie de l'espace-temps). Dans les composantes de ces écarts figurent comme il se doit les variables de perturbations métriques, mais pas celles affectant le contenu[20].

Les écarts sur le contenu étant liés à la géométrie, on s'attend à ce que leurs composantes dépendent elles aussi du choix du système de coordonnées. On recherchera donc, pour le contenu matériel également, des variables invariantes de jauge[21], dont les valeurs soient indépendantes du repérage dans l'espace-temps.

Questions d'échelles

L'expression de "petites perturbations" est ambigüe, car le qualificatif peut être compris spontanément de deux façons : qualifiant l'amplitude, ou qualifiant la longueur d'onde, la distance qu'il faut franchir pour voir la valeur de la perturbation changer significativement. C'est en réalité sur l'amplitude que le terme de *petit* s'applique. Pour le reste, on parlera de faibles ou de grandes longueurs d'onde, ou à l'inverse de grands ou de petits "nombres d'ondes". La valeur de la longueur d'onde est déterminante : elle contrôle en effet les écarts des grandeurs mesurées entre les différentes jauges, et donc la validité de certaines approximations, par exemple la validité de la relation donnée par l'équation de Poisson entre le laplacien du potentiel gravitationnel et le contraste de densité.

La distance permettant de différencier le régimes des faibles et grandes longueurs d'onde est le *rayon de Hubble,* qui correspond approximativement à la taille de l'horizon des évènements[22]

Cas d'un espace de Friedmann Lemaître faiblement perturbé :
Intégration de l'équation de Sachs.

Le principe de l'intégration s'appuie sur plusieurs points :

1. On considère comme *données* les variables de perturbation. Dans cette perspective, le choix d'une jauge est important : il détermine les six variables = fonctions qui seront en oeuvre dans les calculs.
2. On fixe, au delà des contraintes liées au choix de jauge, les ordres de grandeur des perturbations, et donc les quantités que l'on considère comme négligeables. Par exemple, on considére que les modes de perturbations non scalaires peuvent être

---

[20] on peut consulter les formules complètes dans Cosmologie générale, Belin 2005, Annexe C page 772 et suivante.

[21] ainsi le contraste de densité δ mesuré par un observateur dépend de son choix de jauge. Si cet observateur utilise la jauge dite "newtonnienne", le contraste de densité qu'il mesurera sera égal à une certaine invariante de jauge notée δN. S'il utilise la jauge dite "co-mobile" le contraste de densité mesuré sera égale à l'invariante de jauge notée δC différente de δN. Il se trouve que la relation entre le potentiel Ψ et δC a, dans un univers globalement plat, la forme de l'équation de Poisson. On est alors tenté de considérer δC comme le "vrai" contraste de densité, indépendant du système de coordonnées.

[22] L'horizon des évènements est la frontière de l'espace-temps séparant les évènements qui ont pu, peuvent ou pourront un jour être observables, et les évènements qui "resteront à jamais en dehors du champ observationnel" (Cosmologie Primordiale, Belin 2005, page 164). Sa section spatiale actuelle, en taille physique, est de l'ordre de grandeur de cette caractéristique de la vitesse actuelle d'expansion de l'univers qu'est le rayon de Hubble.

ignorés, de même que les anisotropies de pression ; ou encore que l'univers est globalement plat, que l'on est dans le régime *sub-Hubble* dans lequel les longueurs d'onde des perturbations sont faibles, même si elles sont de la taille des "grandes structures de l'univers " etc.

Le lien avec le potentiel gravitationnel.

Dans les conditions d'approximation qui viennent d'être évoquées (en négligeant les modes non scalaires), la partie perturbée de la métrique (écart sur le ds^2) est, en jauge newtonnienne, proportionnelle au potentiel (invariant de jauge) Φ en chaque point de l'espace temps. On montre également qu'au premier ordre, la partie perturbée de la matrice optique $R(\theta i, X)$ de l'équation de Sachs est fonction du champ du potentiel Φ au voisinage du point θi, X. Plus précisément elle est proportionnelle à la matrice jacobienne du même potentiel dans le plan [η_1, η_2] orthogonal à la géodésique θi en ce point. Ce que nous reécrirons ici[23]

$$R^{(1)}(\theta_i, X) = -2\frac{\partial}{\partial \xi_1^*}\frac{\partial}{\partial \xi_2^*}\Phi\left(\theta_i, X, \xi_1^*, \xi_2^*\right)\Big|_{\xi_2^*=\xi_1^*=0}$$

La trace de cette matrice (somme des termes diagonaux) est proportionnelle au laplacien du potentiel au même point ; elle est donc proportionnelle au contraste de densité si Φ est bien le potentiel gravitationnel intervenant dans l'équation de Poisson lorsque celle çi s'avère est valide[24]

Pour obtenir la matrice D, dans sa partie perturbée[25], valable pour une certaine source, il suffit d'intégrer correctement l'équation de Sachs depuis $X=0$ jusqu'à $X=Xs$ correspondant à la position de la source, avec prise en compte, pour chacune des valeurs X de cette séquence, de la valeur de R ci donnée ci dessus.

En faisant "sortir" de l'intégrale, de façon adéquate, les opérateurs différentiels, cette même partie perturbée se réécrit en fonction d'un *potentiel projeté* sur le plan [η_1, η_2] local de l'observateur (son "écran" perpendiculaire à la ligne de visée, comme nous l'avons appelé). La partie perturbée de D devient alors la jacobienne de ce potentiel projeté[26].

Matrice d'amplification. Convergence et contraste de densité

Venons en maintenant à la matrice d'amplification $A(\theta i, Xs)$. Comme nous l'avons vu, celle-ci est obtenue en divisant D (partie non perturbée et partie perturbée) par une distance calculée dans l'univers fictif où le weak-lensing est absent, l'univers non perturbé de référence, celui de Friedmann-Lemaître. La partie non perturbée de l'amplification est la matrice identité.

---

[23] en reprenant les notations déjà utilisées, et sous réserve d'une bonne d'interprétation des formules données par Jean-Philippe Uzan, dans ses diapositives et dans Cosmologie primordiale, Belin 2005, page 379)

[24] ce qui est le cas dans les conditions d'approximation évoquées.

[25] la partie non perturbée étant égale, pour D, à la matrice identité fois la distance associée à Xs dans l'univers non perturbé.

[26] Il faut cependant bien convertir les opérateurs différentiels sur ξ^* en opérateurs différentiels angulaires. Cela nous semble être parfois source de confusion dans les formules.

Une autre écriture s'avère alors intéressante ; elle consiste à retenir, dans l'intégrale exprimant la partie perturbée de *A,* uniquement les traces des matrices optiques *R* , c'est à dire les laplaciens des potentiels ; on obtient par cette opération la trace de la matrice d'amplification, et donc à un facteur près le coefficient de convergence $\varkappa(\theta i, Xs)$. Ce dernier est donc lié aux valeurs de ces laplaciens le long de la géodésique entre *0* et *Xs*, et donc, *in fine,* aux contrastes de densités présents sur le même parcours, lorsque l'équation de Poisson est valide.

Géodésique effective ou géodésique non perturbée ?

La lecture des passages concernant ces calculs, dans *Cosmologie primordiale* ou dans divers articles, nous pose question car les intégrales sont présentées comme prises, non sur la géodésique θi effectivement suivie par les photons dans l'univers perturbé, mais une géodésique théorique $\theta s = \theta i$, celle qui serait suivie par les photons arrivant en θi depuis une source située sur la position $p(Xs)$ dans l'univers non perturbé (homogène et isotrope, celui de Friedmann Lemaître) ; tout se passe comme si, dans le faisceau lumineux aboutissant à l'observateur en provenance d'un objet source, on prenait comme géodésique de référence, non pas une géodésique réelle du faisceau, mais une géodésique fictive de l'univers homogène ; une géodésique le long de laquelle le vecteur tangent *k* et le plan $[\eta_1, \eta_2]$ restent constants. Quel est l'intérêt de ce "tour de passe-passe" ? Il faudrait mieux comprendre ce point.

De l'intérêt de tels calculs.

Quoi qu'il en soit, ces calculs trouvent leur intérêt car ils ouvrent une possibilité de vérification des lois physiques qu'ils mobilisent : le potentiel projeté sur une certaine direction θi de la voûte céleste renvoie d'une part à une estimation de la convergence, d'autre part à un indicateur global de densité le long de cette ligne de visée. S'il existe une corrélation mesurable entre deux valeurs de la convergence sur deux directions proches θi et $\theta i+d\theta i$, il doit exister une corrélation du même type entre deux estimations du nombre de sources (jusqu'à la même distance, c.a.d. jusqu'à la même valeur du redshift) sur ces mêmes directions. Les intensités respectives de ces deux corrélations doivent être compatibles.

Prise en compte d"hétérogénéités discontinues.

La prise en compte du caractère discontinu, à une certaine échelle, de la distribution du contenu matériel s'avère nécéssaire dans l'étude des faisceaux lumineux émis par des objets très compacts et très lointains. Par exemple ceux émis par les supernovae. Ces faisceaux restent en effet très resserrés tout au long de leur parcours, et leur interaction avec la matière ne saurait sans biais être modélisée par l'interaction avec un fluide[27]. Sur une grande part de leur trajet, ils traversent du vide ; ils ne sont alors influencés que par les effets de marée exercés par la matière environnante, se concrétisant par le cisaillement. Mais pour une autre part, ils rencontrent effectivement des "grains" de matière, et subissent l'effet de convergence.

[27] cf introduction de l'article de Fleury et al. 2015.

L'analyse de ce qui se passe pour de tels faisceaux n'a, on le conçoit vu leur étroitesse, pas essentiellement pour but la connaissance de leur transformation qualitative (rotation, cisaillement). Elle vise à apprécier l'impact que le weak-lensing, modélisé à ces résolutions fines, peut avoir sur les valeurs de distances[28], notamment dans leur relation avec le redshift : valeur moyenne et écart avec la valeur standard pour un redshift donné ; mais aussi dispersion de ces valeurs - et donc dispersion des écarts. Cette analyse a - *in fine* - pour but d'affiner l'interprétation des diagrammes de Hubble reliant *redshfits observés* et *distances observées*, en tenant compte des ordres de grandeurs de ces écarts moyens et ces dispersions.

Tant que la précision de telles mesures - notamment celles des distances - n'atteignait pas un certain seuil, la prise en compte des effets du weak-lensing, trop faibles, était inutile. Elle devient nécessaire dès lors que ce seuil est franchi et que l'on souhaite l'exploiter dans l'estimation plus précise des paramètres cosmologiques fondamentaux.

Estimer la dispersion des distances.

L'article de Fleury et al 2015[29] se consacre donc pour une bonne part à l'estimation de la dispersion des distances (angulaires) entraînée par le weak-lensing. Nous donnons ici partiellement la structure de cet article, telle que nous l'avons compris.

L'article considère implicitement chaque géodésique effective θi comme une réalisation particulière d'un *même* processus stochastique. Le paramètre jouant le rôle du temps dans ce processus est le paramètre X . La valeur de la matrice $D(\theta i, X)$ et corrélativement celle de la distance angulaire D_A $(\theta i, X)$ varie donc aléatoirement d'une réalisation θi à l'autre pour un même X ; on peut donc chercher, connaissant la loi du processus, à calculer la moyenne et la variance de ces grandeurs pour un X donné, voire les moments d'ordre plus élevés.

La démarche se déroule en plusieurs étapes[30], consistant à réécrire successivement, sous différentes manières, la loi du processus :

1. introduction dans l'équation de Sachs d'un terme stochastique. La nature discontinue de la distribution de matière sous forme de grains traversés ou simplement proches du faisceau lumineux conduit à décomposer la matrice optique $R(\theta i, X)$ en une partie liée au *tenseur de Ricci,* et une autre au *tenseur de Weyl*. La première traduit l'action d'un grain de matière traversé par le faisceau (convergence) ; la seconde l'action d'un grain extérieur (cisaillement). Différentes hypothèses (isotropie statistique, caractère gaussien, bruit blanc...) affinent ensuite la loi du processus stochastique contrôlant ces deux actions le long de la géodésique. Au terme de ces hypothèses,

[28] puisqu'on a vu que le weak lensing modifiait la distance angulaire (et donc la distance luminosité, davantage mesurable pour les supernovae) souvent en la diminuant par rapport à sa valeur calculée dans un univers de Friedmann-Lemaître, pour un même redshfit z, et, bien sûr, pour les mêmes paramètres cosmologiques fondamentaux.

[29] The theory of stochastic cosmological lensing, Pierre Fleury, Julien Larena, Jean Philippe Uzan, JCAP 11 (2015) 022.

[30] une telle succession d'étapes est classique dans le traitement des équations différentielles stochastiques.

les grandeurs mobilisées se réduisent, pour une valeur X donnée, à la valeur moyenne $<R>$ de la partie Ricci, son bruit δR, le bruit affectant la partie Weyl δW, la valeur moyenne de Weyl étant nulle[31] ; viennent ensuite les *amplitudes de covariance* C_R et C_W fixant le niveau moyen du bruit de chaque type sur chaque position. L'équation de Sachs devient alors une équation différentielle stochastique du second ordre ; avec les présentes notations :

$$\frac{d^2}{dX^2}D = <R> D + \left(\delta R + \delta W\right) D$$

2. récriture de l'équation de Sachs stochastique sous la forme d'une équation dite de Langevin. Ces équations, de forme générale $dY = f(Y,t)\, dt + L(Y,t)\, dB$ contrôlent la progression dans le temps de la position $Y(t)$ d'une particule soumise à deux processus, l'un déterministe, l'autre aléatoire (intervention du terme de type brownien dB). Dans le cas présent X joue toujours le rôle du temps t ; la position Y est un n-uplet de paramètres rassemblant l'information contenue dans la matrice D et sa dérivée première. L'article de Fleury développe deux constructions distinctes de l'espace des Y , l'une à huit dimensions (n=8), et l'autre à quatre, qui auront chacune leur utilité.
3. à partir de chacune des équations de Langevin obtenues, écriture d'une *équation de Fokker Planck*. Ce type d'équation donne l'évolution dans le temps t de la probabilité [32] p de trouver la position Y près d'une position y donnée. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du premier et du second ordre donnant $\partial p(y,t)/\partial t$. Les termes qui y interviennent sont les termes de l'équation de langevin $f(y,t)$, $L(y,t)$ et les caractéristiques du bruit B. La dynamique représentée (celle d'une densité de probabilité sur chaque position y) est purement déterministe : il n'y a plus de terme stochastique. L'application de cette démarche aux deux équations de Langevin fournies par l'étape précédente, conduit à deux équations de Fokker Planck, l'une sur un espace à 8 dimensions, l'autre sur un espace à quatre dimensions. Dans les deux cas, la valeur moyenne $<R>$ et les amplitudes de covariance C_R et C_W interviennent et jouent un rôle déterminant dans l'évolution des probablités.
4. à partir de chacune des équations de Fokker Planck obtenues, extraction d'une équation donnant l'évolution des moments du premier et du second ordre de certaines des composantes de la position Y ; donc donnant l'évolution (en fonction de X) des moyennes et des variances de certaines grandeurs déduites de la matrice D. Et en particulier de son déterminant, c.a.d. le carré de la distance angulaire[33] entre l'observateur et une position X
5. applications de ces résultats *analytiques* (= déduits mathématiquement) *généraux* à des modèles particuliers de distribution de grains dans l'espace- temps, tels le

[31] En fait, compte tenu des symétries, la partie Ricci se caractérise par un simple scalaire affectant une matrice unité, et la partie Weyl, à deux coefficients W_1 et W_2 . Il n'y a pas dans ce modèle de corrélations entre la partie Ricci et la partie Weyl, ni entre W_1 et W_2

[32] plus exactement de la densité de probabilité.

[33] Ainsi les auteurs de l'article affirment-ils “To our knowledge, it is the first time that such a general exact equation for the evolution of the dispersion of the angular distance in an inhomogeneous universe is derived”

modèle du “fromage suisse”[34]. Comparaison des résultats obtenus par ces applications particulières, aux résultats fournis par certaines simulations - de type *ray-tracing* - construites sur ces mêmes modèles. Discussion sur les différences constatées entre ces deux approches, conduisant à moduler certaines hypothèses ayant permis le passage aux équations de Fokker Planck : caractère gaussien, bruit blanc… Recherche de piste pour s’affranchir de ces hypothèses

Le lien avec le redshift

Les équations contrôlant la dynamique des moments de grandeurs extraites de la matrice D sont des équations différentielles du second voire du troisème ordre par rapport au paramètre affine X. Mais l’objectif est de connaître ces mêmes dynamiques évaluées sur le redshift z ; la question est donc posée de la relation entre X et z et de l’éventuelle dispersion de cette relation d’une géodésique à l’autre.

De par sa définition, le redshift z est égal au rapport entre la fréquence d’émission et la fréquence observée, moins 1. Or, dès lors que $X(p)$ est une paramétisation affine de la géodésique suivie par le rayon lumineux, ce rapport des fréquences est égal au rapport entre le produit scalaire des vecteurs[35] u et k apprécié sur la position $p(X)$ d’émission, et le même produit scalaire apprécié sur la position de l’observateur $p(0)$. Ce que l’on écrit dans les conventions d’Einstein :

$$1+z(X)=\frac{\left[u_\mu k^\mu\right](X)}{\left[u_\mu k^\mu\right](0)}$$

Cette équation donne le lien fonctionnel entre une paramétrisation affine quelconque[36] $X(p)$ de la géodésique et le redshift affectant une source située en p ; mais rien n’oblige à ce que d’une géodésique θi à l’autre, la fonction $z(X)$ soit la même, autrement dit que pour la même valeur de la coordonnée radiale le redshift soit identique. On est donc contraint de faire des hypothèses sur cette fonction ; c’est effectivement ce qui est fait dans l’article de Pierre Fleury sur la base du modèle du fromage suisse. La fonction est considérée comme n’étant pas significativement affectée par les trous du fromage : elle est alors la même que celle d’un univers de Friedmann-Lemaitre pur, donc indépendante de la géodésique concernée.

De la matrice d’amplification aux observables du champ de déformation

En écoutant Jean-Philippe Uzan, nous nous sommes interrogés sur la notion de convergence évaluée globalement, la convergence cosmique, qu’il qualifie également d’*effective*, intégrale des convergences locales, $\varkappa(\theta i, Xs)$ (resp. $\varkappa(\theta i, z)$) pondérées par la densité de sources sur chaque position Xs (resp. z) sur la géodésique θi. On définit de la

[34] Ce modèle est celui d’un univers homogène et isotrope en expansion - le “friedmann cheese” - parsemé de “trous” sphériques comportant une masse en leur centre.
[35] respectivement vecteur tangent à la ligne d’univers de l’observateur transporté sur la position p, et vecteur tangent à la géodésique sur cette même position. Ce produit scalaire est calculé en tenant compte de la valeur du tenseur métrique sur la position.
[36] on montre, à partir de la définition du vecteur tangent k, que l’équation est bien invariante dans une transformation affine du paramètre de position, de type $Ys = a\ Xs$ (en l’absence d’un terme constant b pour conserver une valeur nulle sur la position de l’observateur).

même façon un cisaillement cosmique. Mais raisonnons d'abord autour d'un redshift *z* donné.

La connaissance de la valeur $\varkappa(\theta i,\ z)$ apporte théoriquement une information sur la distribution de la matière le long de la ligne de visée pour les redshfits inférieurs à z, mais elle ne constitue pas directement une observable. Il n'en est pas de même pour le cisaillement $\gamma(\theta i,\ z)$. Si l'on fait l'hypothèse que les formes exactes de galaxies autour de ce redshfit, observées dans un certain cône de visée, ne sont pas corrélées, la constatation d'une distribution non aléatoire des excentricités perçues de ces galaxies suggère l'existence d'un cisaillement et permet d'estimer sa valeur. Or, valeur du cisaillement et valeur de la convergence ne sont pas indépendantes, puisqu'elles sont toutes deux issues de la même équation les liant au potentiel gravitationnel projeté[37]. Des formules sont proposées pour passer de l'un à l'autre.
Ce schéma de raisonnement peut-il être étendu à la convergence et au cisaillement cosmique, donc après intégration sur le redshfit ? Il semble que oui, les notions de convergence et de cisaillement cosmiques ont bien un sens. Les valeurs $\varkappa(\theta i,\ z)$ et $\gamma(\theta i,\ z)$ sont liées aux contrastes de densité moyens entre z et 0 , il n'y a pas de raison que l'intégration sur z conduisent à une annulation, il s'agit d'effets cumulatifs. Une source située en un redshift $z_2 > z_1$ subit les effets de lentilles dûs aux contrastes de densité entre $z=z_2$ et $z=z_1$, *plus* ceux dûs aux contrastes de densité entre $z=z_1$ et $z=0$. L'observateur observant le ciel *en profondeur* verra ainsi toutes les galaxies déformées, quel que soit leur redshift.

[37] on montre en particulier que cisaillement et convergence ont un même spectre de puissance. cf Cosmologie primordiale, Belin 2005, pages 381-386